詳細解答

STEP III 2015，第 11 題

力學 • 圓周運動

> **STEP III 2015，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q11

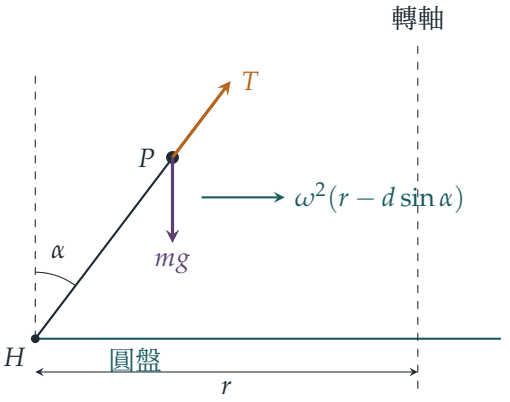
關鍵思路

輕桿（light rod）沒有質量，所以即使它在運動，作用在它上面的力和力矩（moment）都必須完全平衡。在第 (i) 部分，只有兩個力作用在桿上，而來自鉸鏈（hinge）的力對鉸鏈沒有力矩，所以來自 P 的力必須正正指向鉸鏈。之後，P 就是一個作水平圓周運動的質點，餘下的只需分解力（resolving）便可完成。在第 (ii) 部分，兩個質點施加的力不一定沿着桿的方向，但對鉸鏈取力矩，仍然可以得到一條關於 β 的方程。

解答

模型。質點是點質量，桿是輕而剛性的，鉸鏈是光滑的，所以它不會對自身的軸（即通過鉸鏈、垂直於包含桿的鉛垂平面的水平直線）施加力偶（couple）。在該平面上設立坐標軸，原點位於鉸鏈 H，x 軸水平並指向轉軸，y 軸鉛垂向上。桿上與 H 距離為 s 的點位於 $(s\sin\theta,\ s\cos\theta)$，其中 θ 是桿與向上鉛垂線所成的角，而該點與轉軸的水平距離為 $r - s\sin\theta$。

第 (i) 部分



上圖畫出了作用在 P 上的力：它的重量，以及來自桿的力；我們稍後會證明後者沿着桿的方向作用。青色箭頭表示 P 的加速度。

來自 P 的力沿着桿的方向。只有兩個力作用在桿上：來自鉸鏈、作用於 H 的力，以及來自 P、作用於 P 的力 **G**。桿是輕的，所以無論它如何運動，它所受關於鉸鏈軸的總力矩都是零（質量乘以角加速度等於零）。鉸鏈力對 H 沒有力矩，所以 **G** 對 H 也沒有力矩。

其次，P 以轉軸為圓心作水平圓周運動，所以它的加速度是水平的，並指向轉軸，而轉軸位於桿所在的鉛垂平面上。P 的重量也在該平面上，所以桿對 P 施加的力，以及因此 **G**（根據牛頓第三定律（Newton's third law），兩者大小相等、方向相反），也位於該平面上。該平面上一個對 H 力矩為零的力，其作用線必通過 H。這條作用線也通過位於桿上的 P，所以 **G** 與桿平行，得證。

角度。因此，桿沿着桿的方向以力 T 推或拉 P；我們取 T 的方向為由 H 指向 P，即分量為 $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$。$P$ 與轉軸的距離為 $r - d\sin\alpha$，由於 $d\sin\alpha < r$，這個距離是正數，所以 P 與 H 位於轉軸的同一側，而它的加速度 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$ 指向 $+x$ 方向。對 P 應用牛頓第二定律（Newton's second law）：

$$\begin{aligned} &\text{鉛垂方向：} && T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{水平方向：} && T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

將第二式除以第一式（我們有 $\cos\alpha \neq 0$，否則 $T\cos\alpha = 0 \neq mg$）：

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

兩邊乘以 $a\cot\alpha$，得 $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$，即

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

得證。

鉸鏈力。第一式給出 $T = mg/\cos\alpha > 0$，所以桿把 P 推離鉸鏈：桿處於受壓（compression）狀態。根據牛頓第三定律，P 沿着桿的方向以力 T 把桿推向 H。桿是輕的，所以它所受的力總和為零，而鉸鏈對桿的力與此大小相等、方向相反：它**沿着桿的方向，由鉸鏈指向** P（向上，並向內指向轉軸），大小為

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

第 (ii) 部分

現在質量為 $m_i (i = 1, 2)$的質點位於 $(d_i \sin\beta,\, d_i\cos\beta)$，與轉軸的距離為 $r - d_i\sin\beta > 0$。

> **想一想** 現在每個質點都以某個未知的方向拉桿。我們怎樣才能避免逐一求出這些力？

我們不需要逐一求出它們：對每個質點應用牛頓第二定律，可得桿對它施加的力，然後對輕桿關於 H 列出力矩方程，便能消去未知的鉸鏈力。設 $\mathbf{F}_i$ 為桿對質點 i 施加的力。質點 i 的加速度為 $+x$ 方向的 $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$，所以

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_i g) = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\, 0) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}_i = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\, m_i g).$$

根據牛頓第三定律，質點 i 在點 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\, d_i\cos\beta)$ 對桿施加 $-\mathbf{F}_i$。作用於 (x, y) 的力 (X, Y) 關於 H 的逆時針力矩為 $xY - yX$，所以 $-\mathbf{F}_i$ 的力矩為

$$-d_i\sin\beta\cdot m_i g + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

鉸鏈力對 H 沒有力矩，而桿是輕的，所以這兩個力矩之和為零。除以 $\omega^2\sin\beta$（它不等於零：若 $\beta = 0$，力矩方程會變成 $\sum m_i d_i\omega^2 r = 0$，這是錯的），並利用 $g/\omega^2 = a$：

$$\sum_{i=1}^{2} m_i d_i(-a + r\cot\beta - d_i\cos\beta) = 0,$$

即

$$(m_1 d_1 + m_2 d_2)\, r\cot\beta = (m_1 d_1 + m_2 d_2)\, a + (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\cos\beta.$$

除以 $m_1 d_1 + m_2 d_2 > 0$，

$$r\cot\beta = a + b\cos\beta, \qquad b = \frac{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}{m_1 d_1 + m_2 d_2}.$$

驗算

- 只有一個質點時（例如 $m_2 = 0$），得 $b = d_1$，與第 (i) 部分一致。若 $d_1 = d_2 = d$，則同樣有 $b = d$：位於同一點的兩個質點，作用就如一個質點。

- b 是 d_1 與 d_2 的加權平均（權為 $m_i d_i$），所以它介乎兩者之間，理應如此。
- 當 $\omega \to 0$ 時，$a \to \infty$，所以 $\cot\alpha \to \infty$，桿趨向鉛垂，這正是圓盤幾乎不轉動時我們所預期的。當 $\omega \to \infty$ 且 $d > r$ 時，$a \to 0$，方程趨向 $r = d\sin\alpha$：質點趨近轉軸，在那裏它幾乎不需要向心力。
- 取 $r = 1\,\text{m}$、$\omega = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$、$d = 0.6\,\text{m}$ 及 $g = 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$，得 $a = 0.3924\,\text{m}$，而方程給出 $\alpha \approx 0.9251$（約 53.0°）；於是 $r\cot\alpha \approx 0.7538 \approx a + d\cos\alpha$。以電腦模擬桿的運動，令它在這個角度由靜止開始，它會一直停留在該處。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分假設每個質點對桿的力都沿着桿的方向。這只是單一質點時的特殊情況；有兩個質點時，只有關於 H 的總力矩為零。
- 把質點圓周的半徑誤用為 r（或 $d\sin\alpha$），而不是 $r - d\sin\alpha$。
- 把鉸鏈力說成指向鉸鏈：桿處於受壓狀態，所以鉸鏈把桿推向 P。

STEP 之外

第 (ii) 部分的力矩方程，正是有效勢能（effective potential）$\sum m_i\left(gd_i\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2(r - d_i\sin\theta)^2\right)$ 取駐值的條件：在旋轉參考系中，離心力的表現就像一個額外的勢能。這是分析離心調速器（centrifugal governor）等旋轉系統，以及探討穩態是否穩定（stable）的起點。在這裏，有效勢能在 $\theta = \alpha$ 處取極大值，所以第 (i) 部分的穩態其實是不穩定的：只要輕輕推一下桿，它便會擺離該位置。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）涵蓋了剛體力矩和旋轉參考系。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。