詳細解答

STEP III 2015，第 10 題

力學 • 轉動的剛桿

STEP III 2015，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

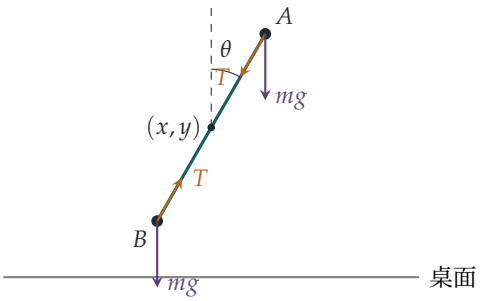
step.maths.org/questions/15-s3-q10

關鍵思路

用中點的運動和桿的轉動來描述整個系統。以 x、y 和 θ 寫出每個質點（particle）的位置，對時間求導兩次，再對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law）。把兩條方程相加便消去張力（tension），得出質心（centre of mass）的運動。把兩條方程相減，再沿垂直於桿的方向分解，又一次消去張力，剩下的就是轉動。三個加速度都求出後，最後一部分就是拋射體運動（projectile motion）加上勻速轉動。

解答

我們把兩個質量模型化為由一根輕質剛性桿連接的質點。每個質點只受兩個力：本身的重量，以及沿桿方向作用的桿的力。設 T 為張力，$T > 0$ 表示桿把每個質點拉向中點。（桿也可以推，此時 $T < 0$；以下的推導與 T 的正負無關。）



質點 A 的運動方程

設 A 為桿上起初位於中點上方那一端的質點，因此由中點指向 A 的向量（vector）是 $a(\sin\theta, \cos\theta)$。於是 A 的位置是

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

這是由鏈式法則（chain rule）得出的，也就是題目要求的速度。再求導一次，對 $\dot{\theta}\cos\theta$ 和 $\dot{\theta}\sin\theta$ 使用積法則（product rule），得

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

桿以大小為 T 的力，沿 $-(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向把 A 拉向中點。重力貢獻 $-mg(0,1)$。因此對 A 應用牛頓第二定律，正好得出題目所給的方程：

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

另一個質點

對於位於另一端的 B，把所有 a 換成 $-a$ 即可。此時桿沿 $+(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向拉 B：

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

這裏 B 的速度是 $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$。

推導加速度

把 (A) 和 (B) 相加，所有含 a 或 T 的項都會抵消：

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{所以} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

以 (A) 減去 (B)，再除以 2：

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

想一想 我們不知道 T，該怎樣把它消去？

張力沿桿的方向作用，所以我們沿垂直於桿的方向 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 分解，即取第一條方程乘以 $\cos\theta$，減去第二條方程乘以 $\sin\theta$。右邊得出 $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$，而 $\dot\theta^2$ 項亦以同樣方式抵消。剩下的是

$$ma\ddot\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

由於 $m, a \neq 0$，得 $\ddot\theta = 0$。（若改為沿桿的方向分解，則得 $T = ma\dot\theta^2$，即繞中點作圓周運動所需的張力。）

最後一部分

在 $t = 0$ 時桿是鉛直的，所以 $\theta = 0$。此時質點 A 在較高位置，速度為 $(\dot x + a\dot\theta,\ \dot y)$；$B$ 在較低位置，速度為 $(\dot x - a\dot\theta,\ \dot y)$。與題目所給的初速度比較：

$$\dot x + a\dot\theta = u, \qquad \dot x - a\dot\theta = 0, \qquad \dot y = v,$$

所以起初 $\dot x = \frac{1}{2}u$、$\dot\theta = \dfrac{u}{2a}$ 及 $\dot y = v$。

由上一部分，$\dot\theta$ 保持不變，所以 $\theta = \dfrac{ut}{2a}$。我們取 $u > 0$，使 θ 遞增。此外 $\ddot y = -g$ 且 $y(0) = h$，所以

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$，即 $t = \dfrac{\pi a}{u}$ 時，桿轉過了 $\frac{1}{2}\pi$。此時桿是水平的，所以兩個質點都位於中點的高度 y。兩者在那一刻同時碰到桌面，當且僅當那時 $y = 0$：

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

乘以 $2u^2$ 並整理，得

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

此即所求。

驗算

- 當 $v = 0$ 時，下落時間為 $\sqrt{2h/g}$，這必須等於 $\pi a/u$。兩邊平方得 $2hu^2 = \pi^2a^2g$，與結果吻合。
- 單位：結果中每一項的量綱（dimensions）都是 $\mathrm{L^3T^{-2}}$。
- 我們用電腦模擬了兩個由剛性桿連接的質點，隨機選取多組 a、u、v，取 $g = 9.8$，並由公式給出 h。例如 $a \approx 1.754$ 時 $h \approx 17.93$。在每一種情況下，兩個質點都在 $t = \pi a/u$ 時同時到達桌面，誤差在 10^{-10} 以內，而且桿是水平的。

常見錯誤

- 把其中一個質點所受張力的方向弄錯。桿把每個質點拉向中點，所以兩個力大小相等、方向相反。
- 在兩條方程中使用不同的 T。桿是輕質的，所以它所受的合力必須為零，兩端的張力相同。
- 對 $\dot{\theta}\cos\theta$ 求導時漏掉 $-a\dot{\theta}^2$ 項。缺少這些項，相減那一步就不能乾淨地得出結果。

STEP 之外

這道題是關於質點系的一條一般定理的小小例子。質心的運動，就如同全部質量和全部外力都集中在質心一樣。內力兩兩抵消，所以若對質心沒有外力矩（torque），則繞質心的角動量（angular momentum）守恆。在大學一年級的力學課程中，你還會學到拉格朗日方法（Lagrangian approach），它把 x、y、θ 當作廣義坐標（generalised coordinates），完全不需要用到 T。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對質心和剛體轉動有詳盡的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。