詳細解答

STEP III 2015，第 1 題

純數學 • 歸約公式與代換

> **STEP III 2015，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q1

關鍵思路

在第 (i) 部分，$I_n - I_{n+1}$ 可以合併成一個分子為 u^2 的積分。把 u^2 寫成 $u \cdot u$，再用分部積分（integration by parts），就能回到 I_n。在第 (ii) 部分，把 x 換成 $1/x$ 時，式子 $(x - x^{-1})^2$ 保持不變，而這個代換（substitution）會產生因子 x^{-2}。把兩種形式取平均，得到 $1 + x^{-2}$，這正好是 $x - x^{-1}$ 的導數（derivative），於是代換 $u = x - x^{-1}$ 便行得通。至於第 (iii) 部分，只要把分母寫成以 $x - x^{-1}$ 表示的形式，它其實就是喬裝了的第 (ii) 部分。

解答

第 (i) 部分

把兩個被積函數（integrand）通分，

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

第二個因子的原函數（antiderivative）很容易求得：

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

因此我們進行分部積分，對 u 求導，並對 $u/(1+u^2)^{n+1}$ 積分：

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

邊界項（boundary term）在 $u=0$ 時為 0。當 $u\to\infty$ 時它亦趨向 0，因為由 $n\geq 1$ 可得 $0\leq u/(1+u^2)^n\leq u/(1+u^2)<1/u$。因此

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

正如所求。移項整理後，

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\, I_n \qquad (n\geq 1).$$

至於起始值，$I_1 = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$。反覆應用這個遞推關係（recurrence），

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

? **想一想** 怎樣把奇數的乘積化成階乘（factorials）？

把分子和分母同乘以偶數的乘積 $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$。這樣分子變成 $1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n) = (2n)!$，分母則變成 $(2^n n!)^2$。所以

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

正如所求。（若要嚴格證明，可用歸納法（induction）：公式在 $n=0$ 時成立，此時它給出 $I_1=\frac{\pi}{2}$。若公式對 I_n 成立，則乘以 $\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$ 會把 $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$ 變成 $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$。）

第 (ii) 部分

第一個等式。在 J 中代入 $x=1/t$，於是 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$，而 x 由 0 變到 ∞ 對應於 t 由 ∞ 變到 0。此外

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

因為平方消除了正負號的改變。因此

$$J = \int_\infty^0 \mathrm{f}((t-t^{-1})^2)\left(-t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{-2}\,\mathrm{f}((t-t^{-1})^2)\,\mathrm{d}t,$$

再把啞變數（dummy variable）t 改名為 x，便得到第一種形式。

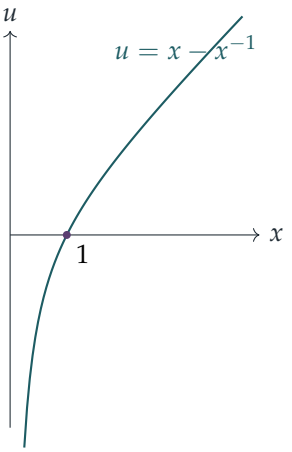
第二個等式。把 J 原來的表達式與這個表達式相加，再除以二，

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(1 + x^{-2}\right)\mathrm{f}((x-x^{-1})^2)\,\mathrm{d}x.$$

第三個等式。現在設 $u = x - x^{-1}$，於是 $\mathrm{d}u = (1+x^{-2})\,\mathrm{d}x$。由於 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x > 0$，$u$ 隨 x 嚴格遞增，由 $-\infty$（當 $x\to 0^+$）增至 $+\infty$（當 $x\to\infty$）。所以這個代換在整個範圍上是一一對應的變數變換：

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

最後一步成立，是因為 $\mathrm{f}(u^2)$ 是 u 的偶函數（even function），所以在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上的積分相等。第 (ii) 部分至此完成。



這條曲線經過 $(1,0)$，並在 $x>0$ 上持續上升，恰好一次取遍 u 的每一個實數值。

第 (iii) 部分

目標是把被積函數改寫成 $x^{-2}\,\mathrm{f}((x-x^{-1})^2)$ 的形式。由於 $(x-x^{-1})^2 = x^2-2+x^{-2}$，

$$x^4-x^2+1 = x^2\left(x^2-1+x^{-2}\right) = x^2\left(1+(x-x^{-1})^2\right).$$

因此

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}(1+(x-x^{-1})^2)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}((x-x^{-1})^2), \qquad \text{其中} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1+y)^n}.$$

根據第 (ii) 部分中 J 的第一種和最後一種形式，

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

在第 (i) 部分的公式中以 $n-1$ 代替 n（當 $n-1\geq 0$ 時成立，即對每個正整數 n 皆成立），得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

驗算

- 當 $n=1$ 時答案是 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$。當 $n=2$ 時答案是 $\frac{\pi}{4}$，當 $n=3$ 時答案是 $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$。對原積分進行數值積分，結果與以上各值吻合，直至 $n=8$ 的情況亦然。

- 遞推關係給出 $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi}{4}$，與用 $u = \tan\theta$ 直接計算的結果一致：$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$。
- 取 $\mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{-y}$，第 (ii) 部分表明 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-1/x)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$。對全部四種形式進行數值計算，都得到這個值。

常見錯誤

- 忘記檢查邊界項 $u/(1+u^2)^n$ 在無窮遠處是否趨於零。這裏它確實趨於零，但這只是因為 $n \geq 1$。
- 代入 $u = x - x^{-1}$ 後仍保留上下限 0 和 ∞。新的下限是 $-\infty$，正是 $\mathrm{f}(u^2)$ 的偶性把範圍帶回 $(0, \infty)$。
- 使用 I_{n+1} 的公式時沒有移動下標：第 (iii) 部分的答案是 I_n，而不是 I_{n+1}。

STEP 之外

比值 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$ 是一個中心二項概率（central binomial probability），而第 (i) 部分的遞推關係，正是推導出 π 的沃利斯（Wallis）乘積的同一個遞推關係。第 (ii) 部分的技巧稱為柯西（Cauchy）－ Schlömilch 變換（Cauchy–Schlömilch transformation）。它可以計算許多沒有初等原函數的定積分，包括像驗算中那個的高斯（Gauss）型積分。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）收錄了更多可用巧妙代換解決的積分；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）則嚴格地處理反常積分（improper integrals）和變數變換。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。