詳細解答

STEP II 2015，第 9 題

力學 • 剛體轉動

> **STEP II 2015，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q9

關鍵思路

這個系統的一切都由一個點控制：兩個質點的質心（centre of mass）G。一個以 A 為樞軸的剛體（rigid body）靜止懸掛時，G 位於 A 的正下方；而當且僅當它有足夠能量把 G 送過最高點時，它才會作完整的旋轉。因此，只要找出 G 的位置及其與 A 的距離，兩部分便迎刃而解。

解答

我們把 B 和 C 視為以輕質剛性桿連接的質點，並設 A 處的轉軸光滑，因此唯一做功的力是重力。

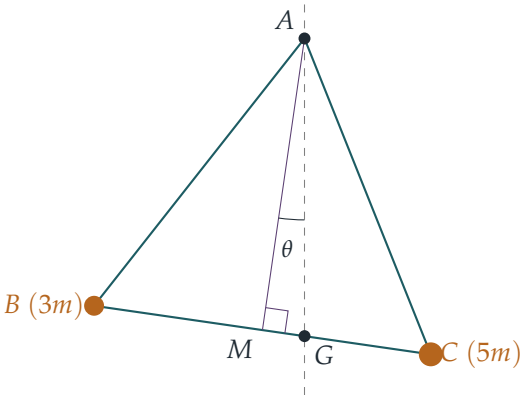
第 (i) 部分

由於桿是輕的，系統的質心就是位於 B 的 $3m$ 與位於 C 的 $5m$ 的質心。該點 G 位於 BC 上，且

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

設 M 為 BC 的中點。於是 $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$，位於靠近 C 的一側。由於三角形是等邊三角形，$AM \perp BC$ 且 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，因此在三角形 AMG 中應用畢氏定理（Pythagoras），

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



在平衡狀態下，作用於 G 的重量 $8mg$ 對 A 的力矩（moment）必須為零，所以 G 位於 A 的正下方：直線 AG 是鉛垂的。而 BC 垂直於 AM，水平方向則垂直於鉛垂線 AG。把一對直線同時旋轉一個直角，並不會改變它們之間的夾角，因此

$$\theta = \angle GAM.$$

在直角三角形 AMG（直角在 M）中，

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

得證。注意較重的質點 C 是 BC 較低的一端，這正合理。

第 (ii) 部分

兩個質點與轉軸的距離都是 a，所以它們的速率永遠相同。若三角形以角速率（angular speed）ω 轉動，每個質點的速率都是 $a\omega$。衝量（impulse）作用後的一瞬間，B 的速率為 v，C 亦然，因此動能為

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

（等價地說，對 A 的轉動慣量（moment of inertia）是 $8ma^2$，而 $\omega = v/a$。）衝量的方向並不重要，因為下面的能量方程只涉及速率。

> ? **想一想** 我們是否需要 v 足夠大，使某些東西在最高點保持拉緊，就像繫在繩上的質點那樣？

不需要。桿是剛性的，既能拉也能推，所以唯一的要求是在系統轉完一整圈之前，角速率永不降至零。這純粹是一個能量條件。

系統的勢能是 $8mg$ 乘以 G 的高度。由於 G 在以 A 為圓心、半徑為 $AG = \frac{7}{8}a$ 的圓上運動，當 G 位於 A 的正上方時勢能最大，此時它比起始位置高出

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

。根據能量守恆（conservation of energy），在 G 升高了 h 的位置，

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

當 $h = \frac{7}{4}a$ 時，右方最小。若右方在該處為正，則全程 $\omega \neq 0$，所以 ω 永不變號，系統一直朝同一方向轉動，一圈接一圈地旋轉。若右方為負，則 ω 必定在 G 到達最高點之前降至零，系統便會擺回去。因此條件是

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

故此

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

（當 $v = v_0$ 恰好成立時，G 會緩緩趨向 A 正上方的位置，卻要花無限長的時間才能到達，這就是條件為嚴格不等式（strict inequality）的原因。）

驗算

- 若兩個質量相等，G 便會在 M，得出 $\theta = 0$ 及 $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$：把 $MG = 0$ 代入公式正好得出這結果。
- 以數值方法在所有方位中求勢能的最小值，得出 $\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$。
- 單位：ag 的單位是 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，所以 v_0 是速率。當 $a = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 時，$v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。
- 以電腦逐步模擬運動，證實當 $v = 1.01v_0$ 時系統會越過最高點，而當 $v = 0.99v_0$ 時則會擺回去。

常見錯誤

- 把 G 的升幅當作 $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$（用了 AM 而不是 AG），結果得出 $v_0^2 = 2\sqrt{3}\,ag$。
- 把 B 和 C 分開處理，忘記衝量同樣令 C 的速率為 v。
- 在最高點加上「繩子保持拉緊」的條件：桿可以承受推力（thrust），所以根本不需要這條件。

STEP 之外

這裏的能量論證是複擺（compound pendulum）的剛體版本：一個在距離質心 d 處以樞軸支撐的物體，其行為就像單擺（simple pendulum），運動方程為 $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$。

在大學一年級的課程中，你會學到這個方程的相平面（phase plane），其中臨界速率 v_0 對應於分隔擺動與完整旋轉的分界線（separatrix）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）詳細討論了剛體繞固定軸的轉動以及物理擺（physical pendulum）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。