詳細解答

STEP II 2015，第 8 題

純數學 • 向量與相切圓

STEP II 2015，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q8

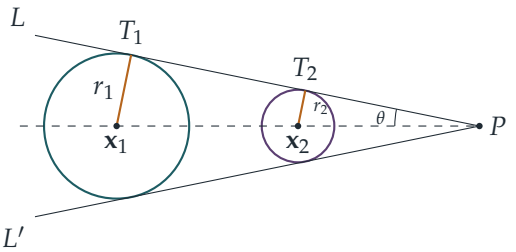
關鍵思路

每個圓心與兩條切線（tangent）的距離相同（即其自身的半徑），所以兩個圓心都位於平分 L 與 L' 之間夾角的直線上，即角平分線（angle bisector）上。沿着這條直線，與 P 的距離和半徑成正比，由此立即得出 (i) 的公式。至於 (ii)，把公式除以 $r_1 r_2$ 後會變得對稱得多：以 $\mathbf{x}_i/r_i$ 和 $1/r_i$ 表示時，三個焦點（focus）滿足一條係數之和為零的線性關係，而這正正就是共線（collinear）的意思。

解答

第 (i) 部分

設 θ 為 L 與 L' 在 P 處夾角的一半，取的是包含兩個圓的那個角。



圓的切線與圓心的垂直距離等於半徑。所以 $\mathbf{x}_1$ 與 L 和 L' 的距離都是 r_1，而與兩條相交直線等距的點，必位於 P 處兩條角平分線的其中一條上。由於兩個圓位於 L 的同一側，亦位於 L' 的同一側，兩個圓心都在 L 與 L' 分割出的四個角區域中的同一個區域內，所以它們位於從 P 出發的同一條半直線上：即該區域的角平分線。設 $\mathbf{u}$ 為沿這條半直線、

由 P 指向兩個圓的單位向量（unit vector）。

設 T_1 為 L 與 C_1 相切的點，則三角形 PT_1X_1（其中 X_1 為圓心）在 T_1 處為直角，所以 $r_1 = PX_1 \sin\theta$。同理 $r_2 = PX_2 \sin\theta$。因此

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

其中 $\mathbf{p}$ 為 P 的位置向量（position vector）。消去 $\mathbf{u}/\sin\theta$，得

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

兩個圓大小不同，所以 $r_1 \neq r_2$，可以相除：

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

即為所求。（若半徑相等，L 與 L' 便會平行，根本沒有焦點。）

第 (ii) 部分

> **想一想** $\mathbf{p}$ 的公式並不具有明顯的對稱性。能否把它改寫，使三個焦點的形式看起來一樣？

把 $(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$ 除以 r_1r_2。記 $s_i = 1/r_i$ 及 $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$，式子變成

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

把第 (i) 部分應用於另外兩對圓（這是容許的，因為 $r_3 \neq r_1$、$r_3 \neq r_2$，而且各圓互不重疊），並以 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{r}$ 表示 Q 和 R 的位置向量，得

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

右方滿足 $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$，所以

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

由於 $s_3 \neq s_1$，可寫成

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{其中} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

因為兩個係數 $\frac{s_2-s_1}{s_3-s_1}$ 與 $\frac{s_3-s_2}{s_3-s_1}$ 之和為 1。所以 $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$，這是經過 R 和 P 的直線上的一點。因此 P、Q 和 R 共線。（若 P 與 R 剛好重合，則同樣得出 $Q = P = R$，命題顯然成立。）

第 (iii) 部分

由第 (ii) 部分，$\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$。假設 $P \neq R$，則點 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ 是中點 $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$ 若且唯若 $\lambda = \frac{1}{2}$（不同的 λ 值對應直線上不同的點）。所以條件為

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

換言之，r_2 必須是 r_1 與 r_3 的調和平均數（harmonic mean）。（在退化情況 $P = R$ 下，三個焦點重合，無論半徑為何，Q 都顯然位於中點。）

驗算

- 第 (i) 部分：令 $r_2 \to 0$，C_2 縮成一點，公式給出 $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$：從一點引出的切線當然經過該點。另外，$\mathbf{p}$ 等於 $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$，當 $r_2 < r_1$ 時位於較小的圓之外，與圖中一致。
- (iii) 的一個數值例子：取圓心 $(0,0)$、$(10,1)$、$(3,8)$，半徑分別為 1、$\frac{3}{2}$、3，使得 $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$。於是 $P = (-20,-2)$、$R = (17,-6)$、$Q = (-\frac{3}{2},-4)$，而 Q 確實是 PR 的中點。
- 公式亦經電腦驗證：對許多隨機產生的圓對，直接求兩條切線的交點，都得出相同的點 P。

常見錯誤

- 沒有解釋為何 P 位於連心線上，或為何 P 位於連接兩圓心的線段之外（承載兩個圓心的，是從 P 出發的同一條半直線）。
- 只顯示 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ 與 $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ 平行，卻沒有檢查關係式的係數之和為零；關係式 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 只有在 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 時才蘊含共線。

STEP 之外

焦點 P 是把 C_1 映射到 C_2、比例因子為正數 r_2/r_1 的放大（enlargement，又稱位似 homothety）的中心。第 (ii) 部分就是蒙日（Monge）的三圓定理：把以 Q 和 R 為中心的兩個放大複合起來，便得到以 P 為中心的放大，而兩個放大的複合的中心，位於經過這兩個中心的直線上。(ii) 中的代數運算是重心坐標（barycentric coordinates，又稱仿射坐標 affine coordinates）的初步體驗；在這種坐標中，共線就是一條係數之和為零的線性關係。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）發展了背後的線性映

射理論，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）則收錄了更多同類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。