詳細解答

STEP II 2015，第 7 題

純數學 • 相交圓

> **STEP II 2015，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q7

關鍵思路

當兩個圓相交於兩點時，通過這兩點的直線（即公共弦（common chord））垂直於連心線（line of centres）。圓 D 平分（bisects）C，當且僅當這條公共弦是 C 的直徑（diameter），即公共弦通過 C 的圓心。由兩個圓心及其中一個交點組成一個直角三角形，對它應用畢氏定理（Pythagoras' theorem），便可把「平分」化為一條方程：（圓心之間的距離）$^2 = r^2 - a^2$。

解答

第 (i) 部分

設 D 的圓心為 Q、半徑為 r，並設 O 為原點。

*一般條件。*假設 D 平分 C，與 C 相交於 P 及 $P' = -P$，其中 $|P| = a$。兩點都在 D 上，所以 $QP = QP' = r$。於是 Q 與 P、P' 等距，因此 Q 位於 PP' 的垂直平分線（perpendicular bisector）上，而這條垂直平分線通過 O（即 PP' 的中點）。因此 $OQ \perp OP$，對三角形 OQP 應用畢氏定理，得

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

反過來，若 D 是任何滿足 $OQ^2 = r^2 - a^2$ 及 $OQ > 0$ 的圓，在 C 上取一點 P 使 $OP \perp OQ$。那麼 $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$，對 $-P$ 亦同理，所以 D 通過 C 上兩個徑向相對（diametrically opposite）的點。兩個不同的圓最多相交於兩點，所以這兩點就是僅有的交點，因此 D 平分 C。

*當 $r > a$ 時的存在性。*把圓心放在 x 軸上，與 O 相距 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$：

$$(x - \sqrt{r^2 - a^2}\,)^2 + y^2 = r^2.$$

直接驗證：從這條方程減去 $x^2+y^2=a^2$，得 $-2x\sqrt{r^2-a^2}+(r^2-a^2)=r^2-a^2$，所以 $x=0$（因為 $r\neq a$），於是 $y=\pm a$。兩圓恰好相交於 $(0,a)$ 及 $(0,-a)$，而這兩點在 C 上徑向相對。所以這個半徑為 r 的圓平分 C。

*當 $r\leq a$ 時的不可能性。*若某個半徑為 r 的圓平分 C，則由 $(*)$ 得 $r^2=OQ^2+a^2\geq a^2$。所以 $r<a$ 是不可能的。若 $r=a$，則 $(*)$ 迫使 $OQ=0$，所以 D 就是 C 本身，它與 C 相交於無限多點，而不是恰好兩點。因此沒有半徑 $r\leq a$ 的圓能平分 C。

第 (ii) 部分

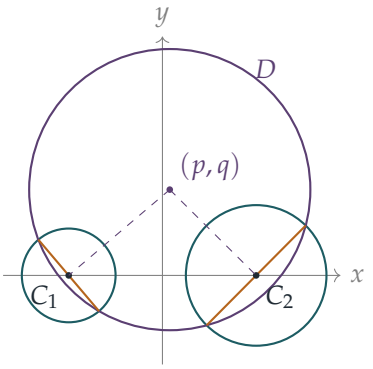
設 D 的圓心為 (p,q)。對每個圓應用 $(*)$（把原點平移至相應的圓心），

$$(p+d)^2+q^2=r^2-a_1^2,$$
$$(p-d)^2+q^2=r^2-a_2^2.$$

以第一式減去第二式，q^2 和 p^2 項互相抵消，剩下 $4pd=a_2^2-a_1^2$，所以

$$p=\frac{a_2^2-a_1^2}{4d},$$

即為所求。



在草圖中（$d=2$，$a_1=1$，$a_2=1.5$，$r=3$），每條公共弦（琥珀色）都是 C_1 或 C_2 的直徑，並垂直於連接圓心的虛線。

為求 q，把 p 代回第一條方程。首先，

$$p+d=\frac{4d^2+a_2^2-a_1^2}{4d},$$

所以

$$q^2=r^2-a_1^2-\frac{(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}=\frac{16d^2r^2-16d^2a_1^2-(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}.$$

分子中被減去的項展開為

$$\begin{aligned}16d^2a_1^2+(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2 &= 16d^4+8d^2(a_2^2-a_1^2)+16d^2a_1^2+(a_2^2-a_1^2)^2\\ &= 16d^4+8d^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2\\ &= (4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2),\end{aligned}$$

最後一行成立，是因為 $(a_2-a_1)^2+(a_2+a_1)^2=2(a_1^2+a_2^2)$ 及 $(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2=(a_2^2-a_1^2)^2$。因此

$$q=\pm\frac{\sqrt{16r^2d^2-(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2)}}{4d}.$$

想一想 不等式（inequality）從何而來？到目前為止，似乎沒有任何東西像是不等式。

圓心 (p,q) 是實點，所以 $q^2\geq 0$。由於 $16d^2>0$，這表示

$$16r^2d^2\geq(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2),$$

這正是所要求關於 r 的條件。

我們還應檢查第 (i) 部分的要求 $r>a_1$（及 $r>a_2$）並不是額外的條件。由於 $d>a_1$，我們有 $4d^2+a_2^2-a_1^2>0$，所以 $p+d>0$；於是 $r^2-a_1^2=(p+d)^2+q^2>0$。同理，因為 $d>a_2$，所以 $d-p>0$，因此 $r^2-a_2^2=(p-d)^2+q^2>0$。所以求得的圓 D 確實同時平分 C_1 和 C_2。

驗算

- 對稱情況 $a_1=a_2=a$：此時 $p=0$，正如關於 y 軸的對稱性所要求的；條件變為 $16r^2d^2\geq 4d^2(4d^2+4a^2)$，即 $r^2\geq d^2+a^2$。這恰好是圓心在原點時的 $(*)$，而原點正是同時最接近 $(\pm d,0)$ 的可能圓心。
- 在草圖的例子中，$p=0.15625$，$q\approx 1.830$，而 D 與 C_1 的交點約為 $(-1.353,-0.762)$ 及 $(-2.647,0.762)$，其中點為 $(-2,0)$，即 C_1 的圓心。在該例中 r 的最小可能值約為 2.377。
- 對調 C_1 和 C_2（$a_1\leftrightarrow a_2$，$d\to -d$），p 的形式不變，不等式亦不變，理應如此。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記 $r=a$ 的情況：$(*)$ 容許 $OQ=0$，你必須說明為何 $D=C$ 不算數。

- 把條件寫成 $OQ^2 = r^2 + a^2$，這是把平分與直角相交（正交圓（orthogonal circles））混淆了。畫出那個三角形：直角位於 C 的圓心，所以斜邊（hypotenuse）是 D 的半徑 r。
- 只給出 $q = +\sqrt{\cdots}$：關於 x 軸反射會得到第二個圓。

STEP 之外

對於點 (p, q) 及圓心為 (x_0, y_0)、半徑為 r 的圓，量 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$ 稱為該點關於該圓的冪（power）；而關於兩個圓具有相等冪的點的集合是一條直線，稱為根軸（radical axis）；像我們那樣把兩條圓方程相減，便能求出它。在本題中，平分條件表示 C 的圓心關於 D 的冪等於 $-a^2$。這些概念，以及相關的圓反演（inversion），在 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）中有精彩的闡述；而許多 STEP 風格的應用可見於 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。