詳細解答

STEP II 2015，第 6 題

純數學 • 利用對稱性積分

> **STEP II 2015，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q6

關鍵思路

把 $\sin x$ 寫成 $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$，就能把 $1+\sin x$ 變成二倍角（double-angle）表達式，接着 $\sec^2$ 便可直接積分。代換（substitution）$y = \pi - x$ 把 $[0, \pi]$ 關於其中點作反射（reflection），而 $\sin x$ 對這個反射毫無反應。因此，$\mathrm{f}(\sin x)$ 前面的任何多項式（polynomial）因子，都可以換成它反射後的版本。在第 (iii) 部分，那個三次式（cubic）是特意挑選的，令這種交換一下子消去所有 x 的冪。

解答

第 (i) 部分

由於 $\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ 及 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$，取 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，得

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

取倒數再乘以 2，得 $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1+\sin x}$，此即所求。（兩邊在相同的點上都沒有定義，即 $\sin x = -1$ 之處。）

因此

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

因為根據連鎖法則（chain rule），對 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 求導會產生一個因子 $-\frac{1}{2}$。

第 (ii) 部分

設 $I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$。令 $y = \pi - x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$，上下限 $x = 0, \pi$ 變成 $y = \pi, 0$，而且 $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$。於是

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^\pi (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^\pi y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

因為 y 只是啞變數（dummy variable）。所以 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，即所求結果。

想一想 未知的積分 I 在等式兩邊都出現了。這是個問題嗎？

不是，這正是我們想要的。代換本身並沒有求出 I 的值，而是給出一條關於 I 的線性方程（linear equation），我們解這條方程便可。

現在取 $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$，它在 $t \in [0,1]$ 上連續（continuous），而這正是 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的取值範圍。由第 (i) 部分，

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^\pi = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

而且 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 在 $[0, \pi]$ 上連續，因為自變量一直留在 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 之內。因此

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

第 (iii) 部分

使用同樣的反射。設 $g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$。展開，

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

設 $J = \int_0^\pi \dfrac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$。完全仿照第 (ii) 部分作代換 $y = \pi - x$，得

$$J = \int_0^\pi \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{其中} K = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

所以 $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$。

想一想 為甚麼這個特定的三次式這麼好用？

以 $u = x - \frac{1}{2}\pi$（即與中點的距離）表示，$g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$。由於 $\sin x = \cos u$，函數 $1/(1+\sin x)^2$ 是 u 的偶函數（even function），所以奇次項 $2u^3$ 和 $-\frac{3}{2}\pi^2 u$ 在對稱區間上的積分為零。剩下的只有常數 $-\frac{1}{2}\pi^3$，正是我們得到的結果。第 (ii) 部分其實是同一回事，只是取 $x = u + \frac{1}{2}\pi$。

要求 K，把第 (i) 部分的恆等式平方：$\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$。代入 $u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，於是 $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$，而 $x = 0, \pi$ 變成 $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$。寫成 $\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$，其積分為 $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$，於是

$$\begin{aligned} K &= \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

驗算

- 對 $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 求導，得 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$。
- 正負號：第 (ii) 部分的被積函數為正，而 $\pi \approx 3.14$ 是合理的，因為由 $\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$ 可得上下界 $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$ 及 $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$。第 (iii) 部分中，$2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$ 在 $(0, \pi]$ 上成立，所以答案為負是對的。
- 數值積分（numerical quadrature）給出 $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$，而第 (iii) 部分的積分 ≈ -20.6709，分別與 $\frac{4}{3}$ 及 $-\frac{2}{3}\pi^3$ 吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分漏掉連鎖法則帶來的因子 $-\frac{1}{2}$，結果得出 $+2\tan(\dots)$ 或 $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$。
- 忘記對調上下限會抵消 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ 帶來的負號。
- 在第 (iii) 部分嘗試連續三次分部積分（integration by parts）。這樣做是可行的，但反射只需一行就能完成。

STEP 之外

第 (ii) 部分的技巧運用了對稱性（symmetry）。如果一個權函數（weight function）在某個反射下保持不變，那麼被積函數中只有關於反射中心為偶的部分才有貢獻。你會在

大學一年級數學中處處遇到這個想法：在傅里葉級數（Fourier series）中，奇函數沒有餘弦項；在概率中，關於 μ 對稱的分佈（distribution），其平均值（mean）就在 μ。對於任何 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數（rational function），代換 $t = \tan \frac{1}{2}x$ 是一個有系統的替代方法。想找更多這類積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。