詳細解答

STEP II 2015，第 5 題

純數學 • 反正切級數

STEP II 2015，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q5

關鍵思路

正切和角公式（tangent addition formula）能把若干個反正切（arctangent）之和化為單一分式，因此關於 $\tan S_n$ 的歸納法（induction）證明只需細心處理代數運算。微妙之處在於由 $\tan S_n$ 推出 S_n 本身這一步：知道一個角的正切值，只能確定該角至相差 π 的整數倍，所以我們必須確定 S_n 落在哪個區間。在第 (ii) 部分，角 α_n 原來正是第 (i) 部分中的那些反正切，而無窮級數（infinite sum）就是 S_n 的極限（limit）。

解答

第 (i) 部分

設 $\theta_m = \arctan(\frac{1}{2m^2})$，於是 $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$，且 $\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$。

$\tan S_n$ 的公式。 當 $n = 1$ 時，$\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$，所以結果成立。

假設對某個 $n \geq 1$ 有 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$。由於 $S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$，和角公式給出

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

分母不為零，因為乘積 $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}$ 小於 1。將分子和分母同乘以 $2(n+1)^3$，得

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n(n+1)+1)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

想一想 我們怎樣知道分母能夠漂亮地因式分解？

我們的目標是 $\frac{n+1}{n+2}$，所以分母理應是 $(n+2)(2n^2+2n+1)$。展開即可證實：$(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$。約去正因式 $2n^2+2n+1$，得

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

這正是 $n+1$ 時的結果。由歸納法，對所有 $n \geq 1$，$\tan S_n = \frac{n}{n+1}$。

S_n 的公式。 單憑 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$，我們只能說對某個整數 k，$S_n = \arctan \frac{n}{n+1} + k\pi$。為了證明 $k = 0$，我們再次用歸納法證明

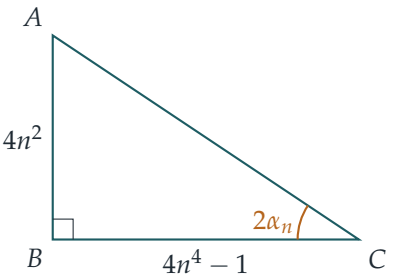
$$S_n = \arctan \frac{n}{n+1}.$$

當 $n = 1$ 時，$S_1 = \arctan \frac{1}{2}$，符合要求。假設結果對某個 n 成立。由於 $0 < \frac{n}{n+1} < 1$，我們有 $0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$。又 $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$，所以 $0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$。相加得

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

因此 S_{n+1} 位於 $[0, \frac{1}{2}\pi)$，這恰好是 arctan 在非負數上的值域；而由第一個結果，$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$。由於 tan 在此區間上是一一對應的（one-to-one），故 $S_{n+1} = \arctan \frac{n+1}{n+2}$。歸納法至此完成。

第 (ii) 部分



由於 B 處的角是直角，角 C 的對邊是 AB，鄰邊是 BC（注意當 $n \geq 1$ 時 $4n^4 - 1 > 0$）。所以

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4-1}.$$

第 (i) 部分提示我們試試 $\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$。設 $t = \frac{1}{2n^2}$，倍角公式（double-angle formula）給出

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4-1},$$

兩者吻合。為了確保這是正確的那個值，而不僅僅是其中一個可能的值，設 $t = \tan\alpha_n$。方程 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$ 可整理為二次方程（quadratic equation）

$$4n^2t^2 + 2(4n^4 - 1)t - 4n^2 = 0,$$

其兩根之積為 -1。其中一根是 $\frac{1}{2n^2}$，所以另一根是 $-2n^2 < 0$。但 $2\alpha_n$ 是直角三角形中直角以外的一個角，所以 $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$，從而 $0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$，且 $t > 0$。因此 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$；又由於 α_n 位於 arctan 的值域內，

$$\alpha_n = \arctan\frac{1}{2n^2}.$$

想一想 這裏的無窮級數是甚麼意思？第 (i) 部分又怎樣幫上忙？

無窮級數就是其部分和（partial sums）的極限，而由第 (i) 部分，這些部分和是

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = S_N = \arctan\frac{N}{N+1}.$$

當 $N \to \infty$ 時，$\frac{N}{N+1} \to 1$；又由於 arctan 是連續（continuous）函數，$\arctan\frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

符合要求。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，第 (ii) 部分的三角形就是我們熟悉的 3–4–5 三角形，其中 $\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$。而 $\tan\alpha_1 = \frac{1}{2}$ 滿足 $\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$。
- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$，而 $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$，與公式的預測一致。
- 從數值上看，把首 2000 項相加得 $S_{2000} \approx 0.785148$，而 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$。兩者相差約 $\frac{1}{4000}$，這正合預期：由差角公式，恰有 $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$。

常見錯誤

- 由 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ 直接得出 $S_n = \arctan\frac{n}{n+1}$，而沒有證明 S_n 位於 $[0, \frac{1}{2}\pi)$。
- 憑僥倖猜中 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$，卻沒有排除二次方程的另一個根。
- 把無窮級數當作 S_∞，卻沒有說明它是 S_N 的極限。

STEP 之外

這其實是一個經過偽裝的伸縮級數（telescoping series）：由於 $\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$，每一項都等於 $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$，於是總和坍縮為 $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$，而這等於 $\arctan\frac{n}{n+1}$。把無窮級數定義為部分和的極限，並懂得何時可以讓極限穿過連續函數，正是大學第一門數學分析（analysis）課程的起點。想進一步閱讀，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是個好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。