詳細解答

STEP II 2015，第 4 題

純數學 • 反正切函數的分支

> **STEP II 2015，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q4

關鍵思路

知道 $\tan\theta$ 的值，只能把 θ 確定至相差 π 的整數倍，因此每條方程都有無窮多個解的分支（branch），彼此之間只是沿鉛直方向平移 π 的倍數。連續性（continuity）和 $x=0$ 處的值決定選取哪一個分支；而每當右方趨向 $\pm\infty$ 時，連續性亦迫使我們轉換分支：那正是角度經過 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍的時刻。所以在每一部分，我們先描繪右方的圖像，然後連續地追蹤角度的變化。

全文中 arctan 指主值（principal value），即 $-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$。

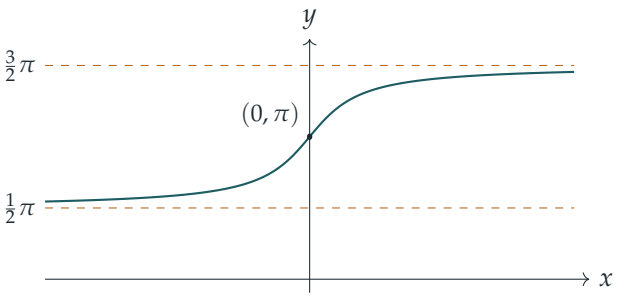
解答

第 (i) 部分

$\tan\theta = x$ 的每一個解都是 $\theta = \arctan x + n\pi$，其中 n 為整數。函數 $\arctan x$ 在整條實數線上連續，所以 $\mathrm{f}(x) - \arctan x$ 是一個只取 $\{n\pi\}$ 中的值的連續函數；連續函數不能在這些孤立的值之間跳躍，因此它是常數。由於 $\mathrm{f}(0) = \pi$ 而 $\arctan 0 = 0$，該常數為 π：

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

所以這條曲線就是一般的 arctan 曲線向上平移 π：它嚴格遞增，以斜率 1 通過 $(0,\pi)$（因為 $\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$），並有水平漸近線（asymptote）：當 $x \to -\infty$ 時為 $y = \frac{1}{2}\pi$，當 $x \to \infty$ 時為 $y = \frac{3}{2}\pi$。由於 $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$，它關於 $(0,\pi)$ 具有 2 階旋轉對稱（rotational symmetry）。



第 (ii) 部分

曲線 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$。記之為 $q(x)$。它是奇函數（odd function），只在 $x = 0$ 處為零，且與 x 同號。當 $x \to \pm\infty$ 時，$q(x) \approx 1/x \to 0$，所以 x 軸是一條漸近線，在右方從上方趨近，在左方從下方趨近。求導，得

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

所以駐點（stationary point）位於 $x = \pm 1$：極大點 $(1, \frac{1}{2})$ 和極小點 $(-1, -\frac{1}{2})$。（等價地，由算術—幾何平均不等式（AM–GM）得 $1 + x^2 \geq 2|x|$，故 $|q(x)| \leq \frac{1}{2}$。）在原點處的斜率為 1。

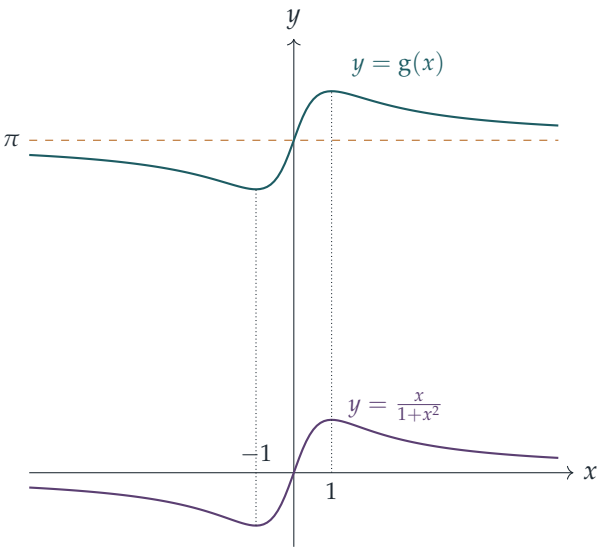
曲線 $y = \mathrm{g}(x)$。現在右方 $q(x)$ 連續且有界，所以與第 (i) 部分完全相同的論證給出

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan \frac{x}{1+x^2}.$$

由於 arctan 是遞增的，g 的升降位置與 q 完全相同。因此

- 當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to \pi$（在右方從上方趨近，在左方從下方趨近）；
- g 在 $x = 1$ 處有極大值 $\pi + \arctan \frac{1}{2} \approx 3.61$，在 $x = -1$ 處有極小值 $\pi - \arctan \frac{1}{2} \approx 2.68$；
- 它以斜率 $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$ 通過 $(0, \pi)$。

它的形狀就是 q 的形狀稍為壓扁（因為當 $u > 0$ 時 $\arctan u < u$），再向上平移 π；它從不接近 $\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{3}{2}\pi$，所以從不需要轉換分支。



第 (iii) 部分

曲線 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$。記之為 $r(x)$。它是奇函數，只在 $x = 0$ 處為零，並在 $x = \pm 1$ 處有鉛直漸近線。當 $x \to \pm\infty$ 時，$r(x) \approx -1/x \to 0$。它的導數是

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

所以 r 在其有定義的三個區間上各自嚴格遞增。由 x 和 $1-x^2$ 的正負號可讀出：

- 在 $x < -1$ 上，r 由 0^+（當 $x \to -\infty$）上升至 $+\infty$（當 $x \to -1^-$）；
- 在 $-1 < x < 1$ 上，r 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，並以斜率 1 通過原點；
- 在 $x > 1$ 上，r 由 $-\infty$（當 $x \to 1^+$）上升至 0^-（當 $x \to \infty$）。

曲線 $y = \mathrm{h}(x)$。在每個區間上分別而言，r 是連續的，所以 $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$ 在該區間上是 π 的某個固定倍數，但在不同區間上這個倍數可以不同。我們逐個區間求出它。

在 $-1 < x < 1$ 上，條件 $\mathrm{h}(0) = \pi$ 給出 $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$。當 $x \to 1^-$ 時 $r \to +\infty$，所以 $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$；當 $x \to -1^+$ 時 $r \to -\infty$，而 $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$。在 $x = \pm 1$ 處的連續性迫使 $\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$ 及 $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$。

> **想一想** 在 $x = 1$ 的右邊緊貼處，$r(x)$ 是很大的負數，所以 $\arctan r(x)$ 接近 $-\frac{1}{2}\pi$。我們要加上 π 的哪一個倍數，才能使 h 在 $x = 1$ 處連續？

當 $x > 1$ 時有 $\mathrm{h}(x) = n\pi + \arctan r(x)$，而當 $x \to 1^+$ 時它趨向 $n\pi - \frac{1}{2}\pi$。要使它等於 $\frac{3}{2}\pi$，須有 $n = 2$。同理，當 $x < -1$ 時有 $\mathrm{h}(x) = m\pi + \arctan r(x) \to m\pi + \frac{1}{2}\pi$（當

$x \to -1^-$），要與 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合須有 $m = 0$。因此

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x < -1, \\ \pi + \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 2\pi + \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{h}(\pm 1) = \pi \pm \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以當 r 急升至 $+\infty$ 再從 $-\infty$ 重新出現時，角度 h 只是繼續遞增，越過 $\frac{3}{2}\pi$（在 $x = -1$ 處同樣越過 $\frac{1}{2}\pi$）。

現在看草圖的各項特徵。

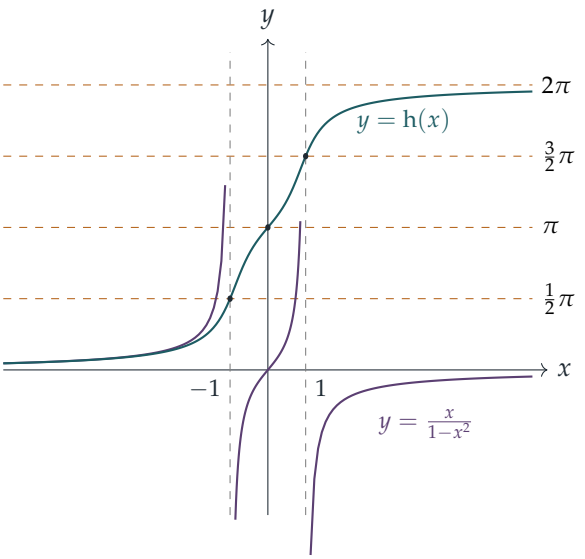
- 漸近線。當 $x \to -\infty$ 時，$r \to 0^+$，所以 $\mathrm{h}(x) \to 0$，從上方趨近；當 $x \to \infty$ 時，$r \to 0^-$，所以 $\mathrm{h}(x) \to 2\pi$，從下方趨近。
- 單調（*monotonic*）。在 ± 1 以外，由鏈式法則（chain rule），

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{r'(x)}{1 + r(x)^2} = \frac{1 + x^2}{(1-x^2)^2 + x^2} = \frac{1 + x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0.$$

  （分母等於 $(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$。）這個表達式在 $x = \pm 1$ 處完全沒有問題，其值為 2，所以 h 在該處是光滑的：曲線以斜率 2 通過 $(1, \frac{3}{2}\pi)$ 和 $(-1, \frac{1}{2}\pi)$，並沒有尖角。
- 關鍵點。$(0, \pi)$，斜率 1；$(\pm 1, \pi \pm \frac{1}{2}\pi)$，斜率 2。
- 對稱性。$\mathrm{h}(-x) = 2\pi - \mathrm{h}(x)$，所以曲線關於 $(0, \pi)$ 具有旋轉對稱。

所以 h 由 0 穩定地遞增至 2π，是一條與第 (i) 部分相似的 S 形曲線，但覆蓋的高度是其兩倍。在草圖中，r 的漸近線 $x = \pm 1$ 恰好對準 h 越過 $\frac{1}{2}\pi$ 和 $\frac{3}{2}\pi$ 的點。

有一個簡潔的方法可把三種情況一併寫出：$\mathrm{h}(x) - \pi$ 是點 $(1 - x^2, x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 內的極角（polar angle）。該點從不到達原點或負水平軸（當 $1 - x^2 \le 0$ 時有 $x \ne 0$），這正是角度連續變化的原因。



驗算

- 每條公式都滿足定義方程：例如 $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$，而且在 0 處的值全都是 π。
- 代入個別數值：$g(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$，以及 $h(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$，正如草圖所要求，它介乎 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ 與 $2\pi\approx 6.283$ 之間。
- h 的連續性：$h(0.999)\approx 4.710$ 及 $h(1.001)\approx 4.714$，分處 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ 兩側，與 $x=1$ 處斜率為 2 一致。以電腦在 $[-10,10]$ 上逐步檢查，確認 f、g、h 都沒有任何跳躍。

常見錯誤

- 對所有 x 都寫 $h(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$：這在 $x=1$ 處向下跳 π，在 $x=-1$ 處向上跳 π，所以並不連續。
- 只因 $\frac{x}{1-x^2}$ 在 $x=\pm1$ 處有鉛直漸近線，便在 $y=h(x)$ 的圖像中也畫上；角度本身保持有限，只是它的正切值趨向無窮。
- 在 $y=h(x)$ 的 $x=\pm1$ 處畫出尖角；該處左右兩側的斜率都是 2。

STEP 之外

我們所做的，是為一個多值反函數（many-valued inverse function）選取一個連續的分支；而「每當正切值經過無窮大便加上 π」這條規則，讓我們初嘗把路徑提升(lifting)到覆

疊空間（covering space）的滋味。同一想法應用於複對數（complex logarithm）和 arg z，正是複分析（complex analysis）中環繞數（winding number）和輻角原理（argument principle）的基礎。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以幾何方式發展這套理論，讀來趣味盎然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。