詳細解答

STEP II 2015，第 3 題

純數學 • 計數與數學歸納法

> **STEP II 2015，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q3

關鍵思路

按最長的棒把三角形分類。被 T_n 計入但不被 T_{n-1} 計入的三角形，正好是那些用上長度為 n 的棒的三角形，所以 $T_n - T_{n-1}$ 就是滿足 $a < b < n$ 及 $a + b \geq n$ 的數對個數。對中間那枝棒 b 的每個選擇，這都是一個簡單的計數，而這些計數構成一個等差數列（arithmetic progression）。把兩個相鄰的差相加便得到 $T_{2m} - T_{2m-2}$，這正是歸納步驟（inductive step）所需要的。

解答

計算最長棒為 c 的三角形

被 T_n 計入的三角形，其棒長為 $a < b < c \leq n$。當中 $c \leq n-1$ 的，恰好就是被 T_{n-1} 計入的三角形，所以

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a + b \geq n\}.$$

固定中間的棒 b。我們需要 $n - b \leq a \leq b - 1$（由於 $b < n$，$a \geq 1$ 自動成立），所以當 $2b - n > 0$ 時有 $2b - n$ 個選擇，否則沒有。因此 b 由大於 $\frac{n}{2}$ 的最小整數取到 $n - 1$。

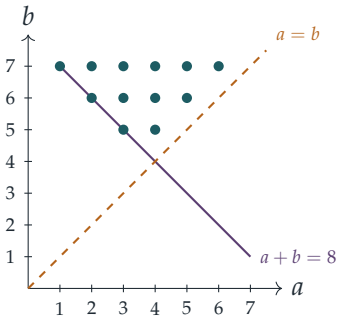
$n = 8$ 的情況

當 $c = 8$ 時，中間的棒可以是 $b = 5, 6, 7$，分別給出 a 的 2、4 及 6 個選擇：

$$b = 5 :\ a \in \{3, 4\}, \qquad b = 6 :\ a \in \{2, 3, 4, 5\}, \qquad b = 7 :\ a \in \{1, \ldots, 6\}.$$

（$b = 4$ 需要 $4 \leq a \leq 3$，這是不可能的。）因此 $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$，正如所求。

下圖顯示這 12 個數對 (a,b)：它們是位於直線 $a+b=8$ 之上或其上方，並嚴格位於對角線 $a=b$ 上方的點。



至於 T_7-T_6，最長的棒是 7，中間的棒 $b=4,5,6$ 分別給出 $2b-7=1,3,5$ 個選擇，所以 $T_7-T_6=1+3+5=9$。因此

$$T_8-T_6=(T_8-T_7)+(T_7-T_6)=12+9=21.$$

一般的差

當 $n=2m$ 時，中間的棒取遍 $b=m+1,\ldots,2m-1$，對應有 $2b-2m=2,4,\ldots,2(m-1)$ 個選擇：

$$T_{2m}-T_{2m-1}=2+4+\cdots+2(m-1)=m(m-1).$$

當 $n=2m-1$ 時，中間的棒取遍 $b=m,\ldots,2m-2$，對應有 $2b-(2m-1)=1,3,\ldots,2m-3$ 個選擇，而首 $m-1$ 個奇數之和是 $(m-1)^2$。相加得

$$T_{2m}-T_{2m-2}=m(m-1)+(m-1)^2=(m-1)(2m-1).$$

（取 $m=4$，這兩條式分別給出 12 和 21，與上面的數值吻合。）只要較小的下標至少是 3，這些式子便成立，即第二條公式要求 $m\geq 3$。

歸納法

設 $f(m)=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$。我們用歸納法（induction）證明對所有 $m\geq 2$，$T_{2m}=f(m)$。

基本情況（*base case*），$m=2$。從棒 1,2,3,4 中選三枝，共有四種選法：$(1,2,3)$、$(1,2,4)$、$(1,3,4)$、$(2,3,4)$，除 $(1,2,4)$ 外全部滿足 $a+b\geq c$。所以 $T_4=3$，而 $f(2)=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 9=3$。

歸納步驟。假設對某個 $k\geq 3$，$T_{2k-2}=f(k-1)$。由差的公式，

$$T_{2k}=f(k-1)+(k-1)(2k-1),$$

所以只需證明 $f(k)-f(k-1)=(k-1)(2k-1)$。

> **想一想** 怎樣才能整理 $f(k)-f(k-1)$，而不用把兩個三次式完全展開？

兩項都含有因子 $k-1$，所以先把它抽出來：

$$\begin{aligned} f(k)-f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1)-(k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k)-(4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6) = (k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

因此 $T_{2k}=f(k)$。由歸納法，對每個 $m\geq 2$，$T_{2m}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$。

奇數枝棒

利用 $T_{2m-1}=T_{2m}-m(m-1)$，

$$T_{2m-1}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)-m(m-1)=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5) \qquad (m\geq 2).$$

若改把棒的數目寫成 $2m+1$（以 $m+1$ 代替 m），則得

$$T_{2m+1}=\tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \qquad (m\geq 1).$$

例如 $T_3=\tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，即唯一的三角形 $(1,2,3)$。

驗算

- 由公式得 $T_6=\tfrac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 13=13$、$T_7=\tfrac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 11=22$ 及 $T_8=\tfrac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 17=34$，所以 $T_8-T_7=12$ 及 $T_8-T_6=21$，與直接計算的結果相同。
- 用電腦逐一數算 $\{1,\ldots,n\}$ 中所有三元組，對 3 至 79 的每個 n，結果都與兩條閉合形式（closed form）吻合。
- 設 $n=2m$，偶數情況的公式約為 $\tfrac{2}{3}m^3=\tfrac{n^3}{12}$，奇數情況的公式亦有相同表現。這是全部 $\binom{n}{3}\approx\tfrac{n^3}{6}$ 個可能三元組的一半，所以當 n 很大時，大約一半的三枝棒選法能組成三角形。

常見錯誤

- 忘記各枝棒長度互不相同，所以 $a<b$ 是嚴格的：容許 $a=b$ 會多算。
- 漏掉面積為零的（退化，degenerate）三角形：條件是 $a+b\geq c$，所以 $(1,2,3)$ 也要計算在內。
- 從 $m=1$ 開始歸納：T_2 沒有定義，因為我們需要 $n\geq 3$。

STEP 之外

像上圖那樣計算一個區域內的格點（lattice points），是分拆（partitions）理論和生成函數（generating functions）的起點：T_n 有一個有理生成函數，而 n 分為偶數和奇數兩種情況，反映了其分母中的因子 $1 - x^2$。像這樣的結果，即計數是 n 的多項式、但該多項式取決於 n 的餘數（residue），稱為擬多項式（quasi-polynomial）。如欲進一步了解遞推關係（recurrence）和計數論證，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。