詳細解答

STEP II 2015，第 2 題

純數學 • 三角形幾何

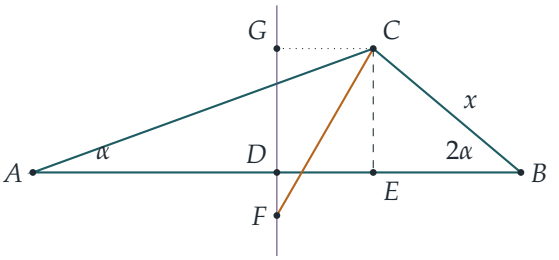
> **STEP II 2015，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q2

關鍵思路

第一個結果只需用正弦定理（sine rule）配合 $\sin 3\alpha$ 的三倍角公式（triple-angle formula）。至於 DE，就把所有長度都沿 AB 從其中一端量起：CE 兩側的直角三角形（right-angled triangle）直接給出 AE 和 BE。DE 的答案出奇地簡單，而正是這份簡單令三等分（trisection）得以成立：它告訴我們 C 與垂直平分線（perpendicular bisector）相距多遠，再與 $CF = x$ 比較，便能確定一個角。

解答

全文中，C 處的角為 $\angle ACB = \pi - 3\alpha$，又因 2α 是銳角（acute angle），故 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。



長度 AB

由正弦定理，並利用 $\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$，得

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

再用三倍角公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$，並除以 $\sin\alpha \neq 0$，得

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

此即所求。

長度 DE

A 和 B 處的角都是銳角，所以由 C 所作垂線的垂足（foot of the perpendicular）E 位於 A 與 B 之間。在直角三角形 CEB 中，

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

因此

$$AE = AB - BE = x(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha).$$

兩式相減，

$$AE - AD = x(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha) = \tfrac{1}{2}x.$$

此值為正，所以 E 位於 D 與 B 之間，且

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

與 α 無關。

三等分

設 G 為由 C 向 AB 的垂直平分線 DF 所作垂線的垂足。由於 CE 和 GD 都垂直於 AB，$CGDE$ 是一個矩形（rectangle），所以 $CG = DE = \frac{1}{2}x$，而且 CG 平行於 AB，即垂直於 CE。

? **想一想** 怎樣把 $CF = x$ 轉化為一個角？

三角形 CGF 在 G 處為直角，斜邊（hypotenuse）$CF = x$，一邊 $CG = \frac{1}{2}x$。所以

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

垂直平分線上與 C 相距 x 的點有兩個，分別在 G 的兩側。從射線 CE（向下指向 AB）起，朝 A 的方向量度，射線 CG 所成的角為 $\frac{\pi}{2}$，所以兩條候選射線 CF 所成的角分別為 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$（$G$ 下方的點）和 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$（$G$ 上方的點）。

現在判斷哪一點與 B 位於 AC 的同一側。在直角三角形 ACE 中，$\angle ACE = \frac{\pi}{2} - \alpha$，所以射線 CA 在同一側與 CE 所成的角為 $\frac{\pi}{2} - \alpha$。由 C 出發、位於直線 AC 上 B 那一側的

射線，就是按這種量法角度小於 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的射線（或位於 CE 另一側、朝向 B 的射線）。由於 $\alpha<\frac{\pi}{4}$，

$$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{5\pi}{6},$$

所以 G 下方的點在 B 那一側，而 G 上方的點則不在。因此 F 是下方的點，$\angle ECF=\frac{\pi}{6}$，而射線 CF 位於角 ACE 之內，因而也在 $\angle ACB$ 之內。所以

$$\angle ACF=\angle ACE-\angle ECF=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\alpha=\frac{1}{3}(\pi-3\alpha)=\frac{1}{3}\angle ACB.$$

故此 CF 在靠近 CA 的一邊截出 $\angle ACB$ 的三分之一（而 $\angle FCB=\frac{2}{3}\angle ACB$）：直線 FC 三等分角 ACB。

驗算

- 取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，三角形的三個角為 30°、60°、90°，而 $AB=(3-1)x=2x$，正是熟悉的斜邊長度。於是 $AE=2x\cos^2 30^\circ=\frac{3}{2}x$，$AD=x$，所以 $DE=\frac{1}{2}x$。C 處的角為 90°，而 $\angle ACF=60^\circ-30^\circ=30^\circ$，正好是它的三分之一。
- 取 $\alpha=20^\circ$ 及 $x=1$，得 $AB\approx 2.532$ 及 $\angle ACB=120^\circ$；直接用坐標構作 F，得 $\angle ACF=40^\circ$。三個結果亦已用電腦對數以千計的隨機三角形逐一驗證。

常見錯誤

- 把 F 取在 G 上方。那一點與 C 的距離同樣是 x，但它位於 AC 的另一側，這正是題目要指明哪一側的原因。
- 在把 DE 寫成兩段長度之差以前，忘記檢查 E 是否位於 A 與 B 之間（以及位於 D 的哪一側）。

STEP 之外

用尺規（ruler and compasses）三等分一般的角是不可能的，這個事實可用域論（field theory）證明：三等分 60° 需要構作一個不可約三次多項式（irreducible cubic）的根，而可構作（constructible）的長度只會滿足一層層的二次方程。在本題中，三角形提供了額外資訊（B 處的角是 A 處的兩倍），正是這一點讓一個簡單的構作也能完成任務。想看更多優美的三角形幾何，可參閱考克斯特（Coxeter）與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何再探》）；至於不可能性的證明，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。