詳細解答

STEP II 2015，第 13 題

概率與統計 • 指數分佈的矩

> **STEP II 2015，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q13

關鍵思路

成本由固定金額 ky 加上一個隨機金額組成，而除非洪水高於預備的高度，否則這個隨機金額為零。因此一切都歸結為 $W = \max(X - y, 0)$ 的矩（moments），即洪水超出預備高度的部分。指數分佈（exponential distribution）具有無記憶性（memoryless）：在 $X > y$ 的條件下，超出量 $X - y$ 仍然服從參數相同的指數分佈。這使期望值（expectation）和方差（variance）都變成只需一行的計算。

解答

記 $p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$，並設

$$W = \begin{cases} X - y & \text{若} X > y, \\ 0 & \text{若} X \le y, \end{cases} \qquad \text{使得} \qquad C = ky + aW.$$

這裏 $y \ge 0$ 是預先選定的常數，所以 ky 並非隨機量。

第 (i) 部分

由於當 $X \le y$ 時 $W = 0$，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

這裏用到參數為 λ 的指數分佈的平均值是 $\frac{1}{\lambda}$ 這個事實（或者用分部積分法（integration by parts）計算）。因此

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

即為所求。

求最小值。對 $y \geq 0$，設 $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$。則

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

所以 g' 嚴格遞增，由 $g'(0) = k - a$ 開始，當 $y \to \infty$ 時趨向 k。

> ? **想一想** 為甚麼不能直接令 $g'(y) = 0$ 就了事？

因為 y 限制在 $y \geq 0$，而駐點（stationary point）$\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$ 只有在 $k/a \leq 1$ 時才落在這個範圍內。所以我們按 a/k 的值分情況討論。

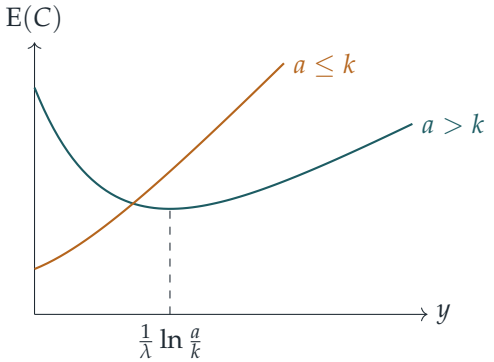
- $a/k > 1$。此時 $g'(0) = k - a < 0$，而 $g'(y) = 0$ 於

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  由於 g' 遞增，g 在此點之前遞減、之後遞增，所以這是 $y \geq 0$ 上的全域最小值。最小期望成本為 $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$。

- $a/k \leq 1$。此時對所有 $y > 0$ 都有 $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$，所以 g 在 $y \geq 0$ 上嚴格遞增，最小值出現在 $y = 0$：完全不作任何預備。此時期望成本為 $\frac{a}{\lambda}$。

這是合理的：每多預備一米，必定要付出 k，而只有在洪水本來會達到該高度時才能節省 a。若 $a \leq k$，節省下來的永遠抵不上付出的。



第 (ii) 部分

加上常數 ky 不會改變方差，所以 $\operatorname{Var}(C) = a^2 \operatorname{Var}(W)$。至於二階矩，用同一個代換 $u = x - y$，

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

因為參數為 λ 的指數隨機變量 U 滿足 $\mathrm{E}(U^2) = \operatorname{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$。因此，以 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$，

$$\operatorname{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right).$$

預先花費的金額是 ky，由於 $k > 0$，它隨 y 遞增；所以我們要證明 $\operatorname{Var}(C)$ 隨 y 增加而減少。求導得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right),$$

當 $y > 0$ 時這嚴格為負，因為此時 $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$。所以 $\operatorname{Var}(C)$ 在 $y \geq 0$ 上關於 y 嚴格遞減：預備花費越多，成本的方差越小，證明完畢。（等價地，$p(2-p) = 1 - (1-p)^2$ 在 $[0,1]$ 上隨 p 遞增，而 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ 隨 y 遞減。）

驗算

- 當 $y = 0$ 時，$C = aX$，所以 $\mathrm{E}(C) = a/\lambda$ 及 $\operatorname{Var}(C) = a^2/\lambda^2$，兩者都與公式吻合。
- 當 $y \to \infty$ 時方差趨向 0：極高的防洪設施幾乎消除了所有不確定性，只剩下固定成本 ky。
- 取 $k = 1$、$a = 3$、$\lambda = 0.5$、$y = 1.2$，公式給出 $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$ 及 $\operatorname{Var}(C) \approx 28.67$；以電腦模擬一百萬年得到 4.496 及 28.68。對這些數值，最佳高度為 $2\ln 3 \approx 2.197$，經電腦搜尋確認。

常見錯誤

- 把 $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 從 0 而不是從 y 開始積分：當 $X \leq y$ 時並沒有洪水損失。
- 忘記邊界 $y \geq 0$，即使在 $a < k$ 時仍給出 $y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k}$，而此時它是負數。
- 把 ky 計入方差；它是常數，對方差毫無貢獻。

STEP 之外

$\mathrm{E}\big(\max(X-y,0)\big)$ 這個量正是行使價（strike price）為 y 的認購期權（call option）的收益，而最優條件 $\mathrm{P}(X>y)=k/a$ 則是運籌學（operations research）中經典的「報販」（newsvendor）法則：選擇使預備的邊際成本等於期望邊際節省的水平。令答案如此簡潔的無記憶性，在連續分佈之中是指數分佈所獨有的。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了指數分佈以及隨機變量函數的期望值。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。