詳細解答

STEP II 2015，第 12 題

概率與統計 • 硬幣序列遊戲

> **STEP II 2015，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q12

關鍵思路

這裏每個序列的長度都是三，所以某一次拋擲會否結束遊戲，只取決於該次拋擲及之前的兩次。因此最自然的做法是追蹤*最後兩次拋擲*：可能的狀態（state）只有四個（HH、HT、TH、TT），而從每個狀態出發，下一次拋擲要麼結束遊戲，要麼把我們帶到另一個狀態。有些狀態一出現便決定了勝負；至於其餘狀態，我們以下一次拋擲作條件（conditioning），列出一對簡單的方程。

解答

全文假設各次拋擲互相獨立（independent），每次出現 H 或 T 的概率（probability）均為 $\frac{1}{2}$。頭兩次拋擲不可能完成任何序列，所以遊戲必定會到達四個「兩次拋擲」狀態之一，每個的概率均為 $\frac{1}{4}$。另外要注意，遊戲以概率 1 結束：無論處於甚麼位置，接下來三次拋擲完成某個指定序列的概率是 $\frac{1}{8}$，所以遊戲再持續超過 $3n$ 次拋擲的機會至多為 $(\frac{7}{8})^n \to 0$。

第 (i) 部分

這裏只有 HHT（屬於 A）和 THH（屬於 B）計算在內。

若頭兩次拋擲是 HH：硬幣會連續出現 H 一段時間，而第一個出現的 T 會完成 HHT，因為它之前至少有兩個 H。在這個 T 之前從未出現過反面，所以 THH 不可能已經出現。因此 A 勝出。

若頭兩次拋擲中出現 T：考慮在那個 T 之後第一次出現兩個連續正面的時刻。緊接這個 HH 之前的那次拋擲不可能是 H（否則在那個 T 之後便會有一個更早的 HH，或者這個

HH 就是開頭的一對，而這已被排除），所以它是 T，於是 THH 已經完成。HHT 不可能更早出現，因為它需要一個 HH，而這正是第一個。因此 B 勝出。

所以 A 勝出若且唯若頭兩次拋擲都是正面，從而

$$\mathrm{P}(A \text{ 勝出}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

現在 HHT、THH、TTH、HTT 四個序列全部有效。以頭兩次拋擲作條件。

- **HH**。與第 (i) 部分一樣，拋擲結果會是 H、H、...，直至第一個 T 出現並完成 HHT。其他序列都不包含「HH 之後接 H」，而且尚未出現任何反面來開始 THH、TTH 或 HTT。因此 A 勝出。
- **TT**。把 H 和 T 的角色互換，以同樣的論證可知第一個 H 會完成 TTH，所以 C 勝出。
- **HT**。若下一次是 T，便得到 HTT，D 勝出。若是 H，最後兩次拋擲是 TH（而 HTH 不完成任何序列）。
- **TH**。若下一次是 H，便得到 THH，B 勝出。若是 T，最後兩次拋擲是 HT（而 THT 不完成任何序列）。

所以遊戲一旦進入狀態 HT 或 TH，便會在這兩個狀態之間來回彈跳，直至 D 或 B 勝出。設 d_1 和 d_2 分別為從 HT 和從 TH 出發時 D 勝出的概率。以下一次拋擲作條件，

$$d_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}d_2, \qquad d_2 = \tfrac{1}{2}d_1.$$

代入得 $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d_1$，所以 $d_1 = \frac{2}{3}$，$d_2 = \frac{1}{3}$。從這些狀態出發只有 B 或 D 能勝出，所以 B 從 HT 出發勝出的概率是 $\frac{1}{3}$，從 TH 出發則是 $\frac{2}{3}$。因此

$$\mathrm{P}(A) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

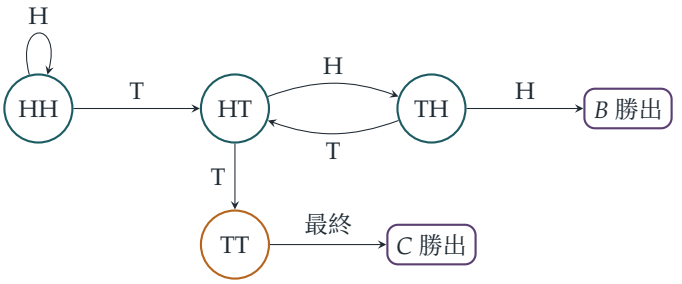
每位玩家勝出的概率都是 $\frac{1}{4}$。

第 (iii) 部分

現在只有 THH（屬於 B）和 TTH（屬於 C）計算在內。

頭兩次拋擲是 TT。之後的拋擲會是 T、T、...，直至第一個 H 出現並完成 TTH。THH 需要一個 TH 之後接 H，而 H 尚未出現過，所以 B 不可能先勝出。因此 C 以概率 1 勝出。

至於其他開局，在遊戲尚未結束的前提下，看清狀態（最後兩次拋擲）如何轉移會很有幫助：



（從 TT 出發，下一個 T 令我們留在 TT，下一個 H 則完成 TTH，所以我們可以把 TT 視為 C 勝出。）

設 p、q、r 分別為從 HT、TH、HH 出發時 C 勝出的概率：

從 HT 出發。T 會得到 TT，從那裏 C 以概率 1 勝出；H 會得到 HTH，它不完成任何一個序列，並令我們處於狀態 TH。所以

$$p = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot q = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}q,$$

即為所求。

從 TH 出發。H 完成 THH，所以 B 勝出；T 得到 THT，不完成任何序列，而我們處於狀態 HT。所以 $q = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$。

? **想一想** 為甚麼一旦知道最後兩次拋擲，之前的歷史便無關重要？

兩個目標序列的長度都是三，所以下一次拋擲會否結束遊戲，只取決於該次拋擲和之前兩次。更早的拋擲無關重要，而將來的拋擲與過去獨立。所以從某個狀態出發 C 勝出的機會，無論我們如何到達該狀態都是一樣的，正因如此 q 才能在 p 的方程右方再次出現。

從 HH 出發。H 令我們留在 HH；T 把我們帶到 HT。所以 $r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p$，得 $r = p$。

求解：$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$，所以

$$p = \tfrac{2}{3}, \qquad q = \tfrac{1}{3}, \qquad r = \tfrac{2}{3}.$$

最後，以頭兩次拋擲作條件（每種情況的概率均為 $\frac{1}{4}$），

$$\mathrm{P}(C \text{ 勝出}) = \tfrac{1}{4}\left(1 + p + q + r\right) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

驗算

- 在第 (ii) 部分，四個概率之和為 1，而且答案具有對稱性：互換 H 和 T 會交換 $A \leftrightarrow C$ 及 $B \leftrightarrow D$，所以 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C)$ 和 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D)$ 是必然的。
- 在第 (iii) 部分，$q = \frac{1}{3} < p$ 是合理的：從 TH 出發，B 只差一次拋擲便勝出。
- 以電腦模擬（simulation）每類遊戲各 200,000 局，得到第 (i) 部分 $\mathrm{P}(A) \approx 0.250$，第 (ii) 部分四位玩家都接近 0.25，第 (iii) 部分 $\mathrm{P}(C) \approx 0.667$，與沿馬爾可夫鏈所作的精確計算吻合。

常見錯誤

- 假設兩個長度相同的序列先出現的機會必定相等。HHT 和 THH 各自的期望等待時間（expected waiting time）都是 8 次拋擲，但 THH 每四次便有三次勝過 HHT。
- 忘記一次沒有帶來勝利的拋擲仍可把你帶到有用的狀態：從 HT 出發，拋出 H 並非單純「失敗」，而是把你帶到 TH。
- 寫下 $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$，卻沒有解釋為何 HTH 令你處於與從 TH 出發相同的位置。

STEP 之外

這裏的方法是踏入馬爾可夫鏈（Markov chains）的第一步：這是一種將來只取決於當前狀態的過程，可以透過解線性方程求出吸收概率（absorption probabilities）來分析。這個遊戲是彭尼遊戲（Penney's game）的一個版本：無論對手選擇哪個由三次拋擲組成的序列，你總能選出一個以至少 $\frac{2}{3}$ 的概率勝過它的序列，所以「哪個序列先出現」並不是一個傳遞關係（transitive relation）。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）正是以這個程度討論馬爾可夫鏈和吸收概率。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。