詳細解答

STEP II 2015，第 11 題

力學 • 動量與能量

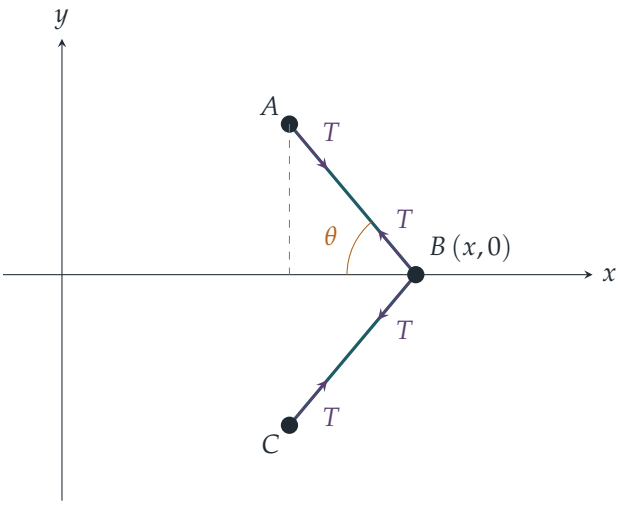
> **STEP II 2015，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q11

關鍵思路

由於運動始終關於 x 軸對稱，兩個坐標 x 和 θ 就足以描述整個系統。桌面光滑(smooth)，繩子輕而不可伸長（light and inextensible），因此有兩個量守恆（conserved）：x 方向的動量（momentum）和動能（kinetic energy）。這兩條守恆定律直接給出 (ii) 中的兩條方程；細看第二條，它告訴我們 $\dot{\theta}$ 永遠不可能為零。單憑這一點，(iii) 和 (iv) 便迎刃而解。

解答

我們把 A、B、C 視為質點（particles），繩子視為輕而不可伸長。重力和法向反作用力（normal reaction）都是豎直的，所以唯一的水平力是張力（tension），而張力是系統的內力。



第 (i) 部分

A 與 B 相距 a，所在直線與 x 軸負方向成角 θ，因此

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

對 t 求導，並對 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 使用鏈式法則（chain rule），得

$$\dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}),$$

此即所求（而 $\dot{x} = v$ 是 B 的速率）。

整個裝置和衝量（impulse）在關於 x 軸的反射下都是對稱的，所以運動始終保持對稱：$C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，其速度為 $(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta})$。

第 (ii) 部分

首先看初始值。在衝量作用的一瞬間，兩條繩子都沿 y 軸，與 B 的新速度垂直，因此繩子無需猛拉 A 或 C；它們由靜止開始，而 $\dot{x} = u$。總 x 方向動量為 mu，動能為 $\frac{1}{2}mu^2$。

動量。沒有外部水平力，所以總 x 方向動量一直等於 mu：

$$m\dot{x} + 2m(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

（A 和 C 的 y 方向動量互相抵消，理應如此。）這裏右邊是 u，即 B 的初速率。試卷印的是 v，但 v 已經用來表示 $\dot{x}$，所以這必定是 u 的誤印。

能量。繩子輕而不可伸長，所以張力對整個系統所做的淨功為零，而其他力亦不做功。在 A 與 C 相撞之前，動能守恆：

$$\dot{x}^2 + 2\left[(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right] = u^2. \tag{2}$$

由 (1)，記 $s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$，得

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}(u - 2as\dot{\theta}), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}(u + as\dot{\theta}).$$

代入 (2)，交叉項 $\mp 4uas\dot{\theta}$ 互相抵消：

$$\tfrac{1}{9}(u - 2as\dot{\theta})^2 + \tfrac{2}{9}(u + as\dot{\theta})^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

所以 $a^2\dot{\theta}^2(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2) = \frac{2}{3}u^2$，即 $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$。由於 $s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

這就是第二個結果（同樣把 v 理解為 u）。

第 (iii) 部分

因為 $3 - 2\sin^2\theta \le 3$，由第 (ii) 部分得

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

所以 $\dot{\theta}$ 永不為零。在兩次碰撞之間它是連續的，因此保持同一符號，θ 單調（monotonically）變化。

開始時 A 靜止，所以由第 (i) 部分得 $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$，即 $\dot{\theta} = -u/a < 0$。因此 θ 從 $\frac{\pi}{2}$ 開始穩定地減小。A 和 C 的 x 坐標始終相同，而 y 坐標為 $\pm a\sin\theta$，所以它們恰好在 $\sin\theta = 0$ 時相遇。第一次碰撞發生在 $\theta = 0$，位於 B 的後方。

想一想 碰撞對 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$ 有甚麼影響？

在 $\theta = 0$ 時，兩條繩子都沿 x 軸，A 和 C 的 x 方向速度相同，y 方向速度為 $\pm a\dot{\theta}$。它們沿 y 方向互相接近，所以兩者之間的衝量沿 y 方向。這與繩子垂直，因此不會產生衝擊張力，所有 x 方向速度都不變。在等質量物體的彈性碰撞（elastic collision）中，沿連心線的速度分量會互換。所以 A 的 y 方向速度由 $a\dot{\theta}$ 變為 $-a\dot{\theta}$：碰撞只是把 $\dot{\theta}$ 的符號反轉，而 $\dot{x}$ 保持不變。

碰撞前後的動量和能量都一樣，所以 (1) 和 (2)，以及由此得出的 (ii) 兩個結果，在下一階段的運動中仍然成立。此時 $\dot{\theta} > 0$，而且和之前一樣不可能變為零。所以 θ 從 0 開始穩定地增大，下一個使 $\sin\theta = 0$ 的值是 $\theta = \pi$。由於 $\dot{\theta} \ge u/(a\sqrt{3})$，它在有限時間內到達該值，所需時間至多為 $\pi a\sqrt{3}/u$。第二次碰撞發生在

$$\theta = \pi,$$

此時 A 和 C 在 B 的前方相遇。

第 (iv) 部分

在整個運動過程中 $\theta \in [0, \pi]$，所以 $\sin\theta \geq 0$。若 $v = \dot{x} = 0$，則由 (1) 得 $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$；兩邊平方並利用 (ii)，

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}.$$

所以可能的值是 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$。

> **想一想** 平方丟失了一個符號。我們實際上需要哪個符號？

我們把 $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ 平方了，而由於 $u > 0$，我們還需要 $\dot{\theta}\sin\theta > 0$，即 $\dot{\theta} > 0$。在 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{2a^2}$，所以 $\dot{\theta} = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$，而 $2a\dot{\theta}\sin\theta = \pm u$。由 (1)：

- 若 $\dot{\theta} > 0$，則 $\dot{x} = \frac{1}{3}(u - u) = 0$；
- 若 $\dot{\theta} < 0$，則 $\dot{x} = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$。

所以答案是否定的。在第一次擺動中（θ 從 $\frac{\pi}{2}$ 減至 0），θ 經過 $\frac{\pi}{4}$ 時 $v = \frac{2}{3}u$。在第一次與第二次碰撞之間（θ 從 0 增至 π），在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 兩處都有 $v = 0$。第二次碰撞後 $\dot{\theta}$ 再次為負，所以在從 π 擺回 0 的過程中，兩個角度處都有 $v = \frac{2}{3}u$。之後這個規律不斷重複：只有在 θ 增大的擺動中，這些角度處才有 $v = 0$。

驗算

- 開始時 $\theta = \frac{\pi}{2}$，(ii) 給出 $\dot{\theta}^2 = u^2/a^2$，與直接由 A 靜止得出的 $\dot{\theta} = -u/a$ 吻合。
- 由 (1)，$\dot{x} = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot{\theta}\sin\theta}{u}\right)$。在 $\theta = 0$ 時這等於 $\frac{u}{3}$：三個質點一起以 $\frac{u}{3}$ 運動，這正是質心（centre of mass）速度；當繩子沿 x 軸拉直時理應如此。在 θ 增大的擺動中，於 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 處 $\dot{x} = -\frac{u}{3}$，所以 B 有一段時間向後移動，這解釋了為何 v 兩次經過 0。
- 用電腦模擬三個由極硬彈簧連接的質點，取 $a = u = 1$，結果重現了 (ii) 的兩條方程。模擬顯示第一次碰撞在 $\theta = 0$，第二次在 $\theta = \pi$；而 v 只在 θ 增大的擺動中、於 $\theta \approx 0.785$ 和 2.356 附近改變符號，該處 $\dot{\theta} \approx 0.707$。在第一次擺動中，模擬給出 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時 $v \approx 0.67$。

常見錯誤

- 把 (1) 的右邊當作 $\dot{x}$：它其實是由衝量決定的常數 u。
- 以為碰撞會把 θ 送回 $\frac{\pi}{2}$，而第二次碰撞又在 $\theta = 0$ 發生。把 $\dot{\theta}$ 反轉會使 θ 增大並越過 $\frac{\pi}{2}$，而且在到達 π 之前沒有任何東西能使它停下，因為 $\dot{\theta}^2$ 有大於 0 的下界。

► 在第 (iv) 部分忘記平方會丟失 $\dot{\theta}$ 的符號。

STEP 之外

選取 x 和 θ 作為坐標，並用它們寫出動能，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點，你會在大學一年級學到。在那個框架中，由於 x 不出現在能量表達式中（它是一個「可忽略」坐標（ignorable coordinate）），x 方向動量守恆會自動出現。之後能量方程把問題化為一條關於 θ 的一階方程，正如這裏一樣。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對質點系統的動量和能量方法有非常詳盡的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。