詳細解答

STEP II 2015，第 10 題

力學 • 約束運動

STEP II 2015，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

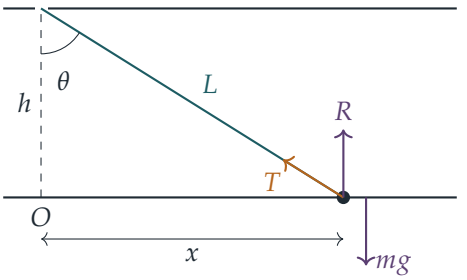
step.maths.org/questions/15-s2-q10

關鍵思路

這是一道約束（constraint）問題：質點的運動完全由繩子決定，所以先處理運動學（kinematics），再處理力。先把天花板下方的繩長用質點與小孔正下方那一點的水平距離表示出來，然後對時間求導；這段繩長的變化率是已知的。求得加速度後，在水平方向應用牛頓第二定律（Newton's second law）便得出張力（tension），再在鉛垂方向分解力便得出法向反作用力（normal reaction）；質點留在地面期間，法向反作用力必須保持非負。

解答

我們把質點視為光滑水平地面上的一點，並把繩子視為輕而不可伸長（inextensible），因此整條繩子的張力 T 都相同。設 O 為小孔正下方地面上的一點，x 為質點與 O 的距離，L 為小孔與質點之間的繩長。



速率

由畢氏定理（Pythagoras）及圖中的三角形，

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

繩子以速率 V 經小孔被拉入，所以 $\dot{L} = -V$。把 $L^2 = x^2 + h^2$ 對時間求導（h 為常數）：

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

因此質點以速率

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

向 O 移動，這個速率總是大於 V（以速率 V 移動的是繩子，而不是質點）。

? **想一想** 為甚麼質點的速率不就是 V，或者 $V\sin\theta$？

只有質點速度沿繩子方向的分量，才必須等於繩子被拉入的速率。由於繩子與地面成角 $\frac{\pi}{2} - \theta$，這個分量是 $v\sin\theta$。令 $v\sin\theta = V$，便得出與上面相同的答案，而且清楚說明了為甚麼 $v > V$。

加速度

利用商法則（quotient rule）、$\dot{L} = -V$ 及 $\dot{x} = -VL/x$，再對 $\dot{x} = -VL/x$ 求導一次：

$$\ddot{x} = -V\,\frac{\dot{L}\,x - L\,\dot{x}}{x^2} = -V\,\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

代入 $x = h\tan\theta$，得 $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$。由於 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 都是負數，質點正在加速：其加速度的大小為

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

方向指向 O。（驗證一下：當 θ 減小時，$v = V/\sin\theta$ 的確增大。）

張力，以及離開地面

作用於質點的力有：重量 mg、地面施加的法向反作用力 R（由於地面光滑，此力為鉛垂方向），以及沿繩子方向的張力 T；張力的水平分量為指向 O 的 $T\sin\theta$，鉛垂分量為向上的 $T\cos\theta$。

在水平方向，由牛頓第二定律，

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

在鉛垂方向，質點留在地面期間處於平衡狀態，所以

$$R + T\cos\theta = mg \quad \Longrightarrow \quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

想一想 質點被拉近時，R 怎樣變化？

當質點接近 O 時，θ 減小，所以 $\tan^4\theta$ 減小，R 亦隨之穩定地減小。開始時（θ 較大）R 接近 mg；只要 $R \geq 0$，質點便留在地面，而在 $R = 0$ 的第一刻離開地面，即當

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad \Longleftrightarrow \quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

此即所求。對於更小的 θ，公式會給出 $R < 0$，這是不可能的，所以質點確實已離開地面。

驗算

- 量綱（dimensions）：V^2/h 是加速度，mV^2/h 是力，而 $V^2/(gh)$ 是無量綱的，正如 $\tan^4\theta$ 必須是無量綱一樣。
- 極限情況：當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（質點非常遠）時，繩子幾乎水平，$v \to V$ 且 $a \to 0$，符合預期。當 $\theta \to 0$ 時，速率和張力都趨於無限大，所以質點必定在到達 O 之前離開地面。
- 數值：取 $V = 2$、$h = 1$、$\theta = \frac{\pi}{4}$，得 $v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ 及 $a = 4$；以數值方法對 $x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$ 求導，得出相同的數值。取 $g = 9.8$，質點在 $\theta \approx 38.6°$ 時離開地面。

常見錯誤

- 把質點的速率當作 V 或 $V\sin\theta$，而不是 $V/\sin\theta$。
- 第二次對 $\dot{x} = -VL/x$ 求導時，忘記 L 也在變化。
- 因為繩子以恆定速率移動，便假設張力不變；其實質點在加速，所以張力並非不變。

STEP 之外

這裏的質點只有一個自由度（degree of freedom）：一旦繩子的運動給定，質點在每一時刻的位置便已確定。帶有這類約束的問題，可用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）系統地處理；這是大學課程第一或第二年會學到的內容，做法是把約束直接融入坐標的選擇之中，之後才求出像 R 和 T 這樣的約束力。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）收錄了許多這類問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。