詳細解答

STEP II 2015，第 1 題

純數學 • 不等式與級數

STEP II 2015，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q1

關鍵思路

每一條函數與對數（logarithm）之間的不等式，只要代入一個精心選取的 x 值，就會變成級數（series）中某一項與兩個對數之差之間的不等式。把這些差相加，幾乎所有項都會互相抵消（即該和式「伸縮相消」（telescopes）），只剩下一兩個對數。技巧在於選取適當的代換，使對數能拆成一個差。

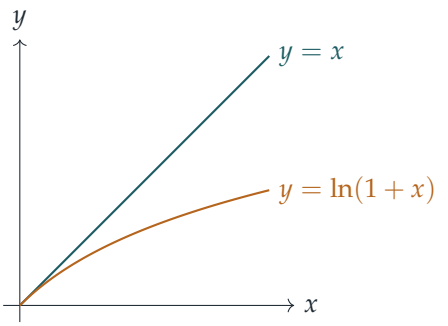
解答

第 (i) 部分

對 $x \geq 0$，設 $f(x) = x - \ln(1+x)$。那麼 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$，而且

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{對} x > 0.$$

所以 f 在 $[0, \infty)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），因此對每個 $x > 0$，都有 $f(x) > f(0) = 0$。即對所有正數 x，$x > \ln(1+x)$，正是所求。



現在對正整數 k 取 $x = \frac{1}{k}$：

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

把 $k = 1, 2, \ldots, n$ 的各式相加，右方便伸縮相消：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

這就是所求的結果。（附帶一提，由於 $\ln(n+1) \to \infty$，調和級數（harmonic series）發散（diverges）。）

第 (ii) 部分

對 $0 \le x < 1$，設 $g(x) = x + \ln(1-x)$。那麼 $g(0) = 0$，而且

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{對} 0 < x < 1,$$

因為在該區間內 $1 - x > 0$。所以 g 嚴格遞減，且對 $0 < x < 1$ 有 $g(x) < 0$；即

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

想一想 應該代入哪個 x 值？為甚麼不能用 $k = 1$？

我們希望左方是 $\frac{1}{k^2}$，所以取 $x = \frac{1}{k^2}$。這要求 $x < 1$，故 $k \ge 2$；當 $k = 1$ 時，對數 $\ln(1-1)$ 沒有定義。這就是為甚麼要把 $\frac{1}{1} = 1$ 這一項另外處理，而它正是上界 $1 + \ln 2$ 中的那個 1。對 $k \ge 2$，關鍵在於 $1 - \frac{1}{k^2}$ 可以因式分解：

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

所以

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = (\ln k - \ln(k-1)) - (\ln(k+1) - \ln k).$$

記 $a_k = \ln k - \ln(k-1)$，則右方為 $a_k - a_{k+1}$。由 $k = 2$ 加至 N，和式伸縮相消：

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

因為 $\ln\frac{N+1}{N} > 0$。

所以部分和（partial sums）$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$ 隨 N 遞增，而且全部小於 $1 + \ln 2$。上有界（bounded above）的遞增數列必定收斂（converges），因此這個無窮級數收斂，而其和至多為 $1 + \ln 2$。

要使不等式嚴格成立，須注意取極限只能保留 $\leq$，所以我們要預留一點空間。$k=2$ 時的不等式 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$ 是嚴格的；設 $\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$。那麼對每個 $N \geq 2$，同樣的伸縮相消給出

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

所以取極限得 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \ln 2 - \delta < \ln 2$。加上 $k=1$ 的一項，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

這就是所求的結果。

驗算

- 第 (i) 部分取 $n=1$：$1 > \ln 2 \approx 0.693$。取 $n=10$：$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx 2.929$，而 $\ln 11 \approx 2.398$。
- 第 (ii) 部分：真正的和是 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$，穩穩低於 $1+\ln 2 \approx 1.6931$。事實上，我們的推導給出稍為更緊的上界 $1+\ln 2 - \delta \approx 1.6555$，其中 $\delta \approx 0.0377$。
- $\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2}$ 的伸縮相消上界 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$，已用電腦對所有不超過 10^5 的 N 驗證。

常見錯誤

- 連 $k=1$ 也代入 $x = \frac{1}{k^2}$：此時 $\ln(1-x)$ 沒有定義；而忘記把第一項另外處理，就會漏掉 $1+\ln 2$ 中的 1。
- 只證明 $f'(x) > 0$ 而沒有指出 $f(0) = 0$：一個函數可以是遞增的，但仍然是負數。
- 對嚴格不等式取極限，卻不加說明便聲稱極限仍是嚴格不等式；極限只能給出 $\leq$。

STEP 之外

把和式與對數（或積分）比較，正是積分判別法（integral test）的起點；而把第 (i) 部分加以精煉，可以證明 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ 收斂至歐拉常數（Euler's constant）$\gamma \approx 0.5772$。精確值 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 是歐拉（Euler）對巴塞爾問題（Basel problem）的解答，大學一年級課程常以傅里葉級數（Fourier series）推導出來。我們所用的單調收斂（monotone convergence）論證，即有界遞增數列必定收斂，是實分析（real analysis）的基石之一；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。