詳細解答

STEP I 2015，第 9 題

力學 • 拋體運動

> **STEP I 2015，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q9

關鍵思路

「最後落地」關乎的是*落地時間*（landing time），而不是發射時間：較遲以較低仰角發射的子彈，在空中停留的時間較短，因此可能比較早發射的子彈先落地。把落地時間寫成發射時間加上飛行時間（time of flight），再在整段發射期間內求其最大值。以角度 α 代替 t 作為變量，微積分會簡潔得多；而 k 所滿足的條件，決定了最大值出現在駐點（stationary point）還是端點。

解答

建立模型

把每顆子彈視為只受重力作用、沒有空氣阻力、從地面發射的質點。以仰角 α 發射的子彈，在發射後時間 s 的豎直位置為 $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$，所以它在經過

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

之後回到地面，而在這段時間內它的水平位移為

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

仰角為 α 的子彈在時間 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$ 發射；當 t 取遍 $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ 時，α 取遍 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$，每個值恰好取一次。因此這顆子彈的落地時間為

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \frac{1}{6}\pi \le \alpha \le \frac{1}{3}\pi.$$

最後落地的子彈，就是使 L 取最大值的那一顆。由於 $k = \dfrac{g}{2\lambda u}$，我們有 $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$，以及

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

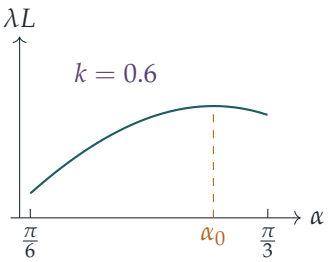
所以當 $\cos\alpha > k$ 時 L 遞增，當 $\cos\alpha < k$ 時遞減。在我們的區間上，$\cos\alpha$ 由 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$（在 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 處）遞減至 $\frac{1}{2}$（在 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 處）。

想一想 為甚麼 α 越大，代表發射時間越早？這一點為何會影響 L' 的正負號？

槍管正在下降，所以仰角較大的子彈先發射。把 α 稍為增大，發射時間每弧度提早 $1/\lambda$，但飛行時間每弧度增加 $\frac{2u}{g}\cos\alpha$。$L'(\alpha)$ 正是這兩種效應的此消彼長，其正負號告訴我們哪一方佔優。

情況 $\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$

此時 k 落在 $\cos\alpha$ 的值域之內，所以恰好有一個 $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 滿足 $\cos\alpha_0 = k$。由於 cos 在該區間上遞減，當 $\alpha < \alpha_0$ 時 $\cos\alpha > k$，當 $\alpha > \alpha_0$ 時 $\cos\alpha < k$。所以 L 在 α_0 之前遞增、之後遞減，以仰角 α_0 發射的子彈最後落地。（若 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，則 α_0 是端點，而 L 是單調的，但結論不變。）



（縱軸經過平移，好讓落地時間的變化清楚可見。）

利用 $\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$（取正值，因為 α_0 是銳角），這顆子彈的射程為

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

這就是所求的距離。

情況 $k < \frac{1}{2}$

此時對區間內每個 α 都有 $\cos\alpha \ge \frac{1}{2} > k$，所以 $L'(\alpha) > 0$ 處處成立，L 嚴格遞增。最大值出現在 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$：第一顆發射的子彈最後落地。它的射程為

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

所以當 $k < \frac{1}{2}$ 時，最後一顆落地的子彈落在距離槍 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ 之處。

（為求完整：若 $k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$，則 L 遞減，最後發射的子彈最後落地；由於 $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$，距離同樣是 $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$。）

驗算

- 連續性：在 $k = \frac{1}{2}$ 時，第一條公式給出 $\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}u^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$，與 $k < \frac{1}{2}$ 的答案一致；在 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 時，它亦給出相同的值。
- 取 $u^2/g = 1$ 及 $k = 0.6$，最後落地的子彈滿足 $\cos\alpha_0 = 0.6$，落在距離 $2(0.6)(0.8) = 0.96$ 之處。以電腦抽取兩萬個發射時間，並以數值方法逐步模擬該子彈的運動，結果吻合。
- 單位：k 是無量綱的（g 除以 λu，後者是速度每單位時間），而 u^2/g 是長度。

常見錯誤

- 只求射程或飛行時間的最大值，而不是落地時間 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 的最大值。
- 想當然地以為最後發射的子彈就是最後落地的。
- 忘記 t 隨 α 增大而減少，以致弄錯 L' 的正負號。

STEP 之外

在閉區間上求函數的最大值，就是把區間內部的駐點與端點互相比較；而在這裏，由一個參數決定哪一方勝出。這種「哪個約束生效」的切換，正是約束最優化（constrained optimisation）的起點，你會在大學一年級的數學方法課程中遇到。如想閱讀更多這類風格的力學內容，可參考 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。