詳細解答

STEP I 2015，第 8 題

純數學 • 冪和的整除性

> **STEP I 2015，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q8

關鍵思路

把和式寫兩次，一次順序、一次倒序，然後相加：這是第 (i) 部分所用的高斯（Gauss）技巧，而當各項是 k 次冪且 k 為奇數時，第 (ii) 部分正是為此而設的。把 r^k 與 $(n-r)^k$ 配對，可證 $2S$ 是 n 的倍數；把 r^k 與 $(n+1-r)^k$ 配對，可證 $2S$ 也是 $n+1$ 的倍數。由於 n 與 $n+1$ 沒有公因數，兩個結果合起來便得出能被 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除（divisible）。

解答

第 (i) 部分

設 $T = 1+2+\cdots+n$。把和式倒序寫出，

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

把各列相加，n 列中每一列之和都是 $n+1$，所以 $2T = n(n+1)$，即

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

第 (ii) 部分

在模 N 下考慮，有 $N-m \equiv -m$，所以

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

其中因為 k 是奇數，所以 $(-m)^k = -m^k$。因此 N 整除 $(N-m)^k + m^k$。

如果你想避免使用同餘（congruence）：當 k 為奇數時，有以下因式分解（factorisation）

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}),$$

（符號正負交替，括號內共有 k 項，所以最後一個符號是 $+$）。取 $a = N - m$、$b = m$，便得 $a + b = N$ 乘以一個整數。這裏完全不需要 $m \leq N$：若 $m > N$，則 $N - m$ 是負數，但它仍然是整數。

被 n 或 $\frac{1}{2}n$ 整除

設 $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$，其中 k 為奇數。我們仿照第 (i) 部分的技巧。由於 $0^k = 0$，可以寫成

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

第二種寫法就是同一個和式倒序排列。相加得

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \Big[(n-r)^k + r^k \Big].$$

由第 (ii) 部分（取 $N = n$、$m = r$），每個方括號都能被 n 整除，所以 n 整除 $2S$。設 $2S = nM$，其中 M 為整數。

- 若 n 為奇數，則 n 整除 $2S$ 且與 2 沒有公因數，所以 n 整除 S。
- 若 n 為偶數，則 $S = \frac{1}{2}n \cdot M$，而 $\frac{1}{2}n$ 是整數，所以 $\frac{1}{2}n$ 整除 S。

> ? **想一想** 當 n 為偶數時，為甚麼不能直接說「n 整除 S」？

因為由「$n \mid 2S$」推出「$n \mid S$」這一步，需要 n 與 2 互質（coprime）。事實上這一步可能不成立：取 $n = 2$、$k = 1$，得 $S = 3$，它不是 2 的倍數。對於偶數 n，我們只能說 n 的一半整除 S。

被 $1 + 2 + \cdots + n$ 整除

由第 (i) 部分，我們需要證明 $\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$。換一種方式配對：把 $1, 2, \ldots, n$ 倒序排列，會把 r 變成 $n + 1 - r$，所以

$$2S = \sum_{r=1}^{n} \Big[(n+1-r)^k + r^k \Big],$$

而由第 (ii) 部分（取 $N = n+1$、$m = r$），每個方括號都能被 $n+1$ 整除。所以 $n+1$ 整除 $2S$。

n 與 $n+1$ 是相鄰整數，所以除了 1 以外沒有其他公因數；於是 n 的任何因數與 $n+1$ 的任何因數也是如此。我們用到以下事實：若兩個互質的整數各自整除 S，則它們的積也整除 S。

- n 爲奇數。我們已證明 $n \mid S$。此外 $n+1$ 是偶數且 $n+1 \mid 2S$，所以寫成 $2S = (n+1)L$，得 $S = \frac{1}{2}(n+1)L$，即 $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$。由於 n 與 $\frac{1}{2}(n+1)$ 互質，它們的積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除 S。
- n 爲偶數。我們已證明 $\frac{1}{2}n \mid S$。此外 $n+1$ 是奇數且整除 $2S$，所以（由於它與 2 互質）它整除 S。由於 $\frac{1}{2}n$ 與 $n+1$ 互質，它們的積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除 S。

兩種情況下，S 都能被 $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$ 整除，證畢。

想一想 為甚麼可以把兩個整除結果合而為一，把除數相乘？

若 $a \mid S$、$b \mid S$ 且 $\gcd(a,b) = 1$，寫 $S = aq$。那麼 $b \mid aq$，而 b 與 a 沒有公共質因數，所以整除 b 的每個質數冪都必定整除 q；因此 $b \mid q$，從而 $ab \mid S$。沒有互質這個條件，結論便不成立：$4 \mid 12$ 且 $6 \mid 12$，但 $24 \nmid 12$。正因如此，我們才小心地把 n 與 $\frac{1}{2}(n+1)$ 配對，或把 $\frac{1}{2}n$ 與 $n+1$ 配對，而不是在 n 為偶數時把 n 與 $n+1$ 配對。

驗算

試取 $k = 3$、$n = 4$：$S = 1+8+27+64 = 100$，而 $1+2+3+4 = 10$ 整除 100。事實上 $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$，所以 $k = 3$ 時結果是顯然的。取 $k = 5$、$n = 5$：$S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15 \times 295$。最終結果亦已用電腦驗證，對所有 $n \le 119$ 及所有奇數 $k \le 15$ 均成立。當 k 為偶數時，命題不成立：$1^2+2^2 = 5$ 不能被 3 整除，這說明 k 為奇數這個條件確實用上了。

常見錯誤

- 在 n 為偶數時，由 $n \mid 2S$ 推出 $n \mid S$。
- 把不互質的除數相乘，例如聲稱 $n(n+1) \mid 2S$，然後不加小心地除以 2。
- 把 r^k 與 $(n-r)^k$ 配對時忘記 $r = 0$（或 $r = n$）這一項：把 $0^k = 0$ 包括在內，每一項便能整齊地配對。

STEP 之外

冪和（power sum）$1^k+\cdots+n^k$ 是 n 的 $k+1$ 次多項式，可由 Faulhaber 公式以伯努利數（Bernoulli numbers）表示；當 k 為奇數時，它們甚至可以寫成 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 的多項式，這從另一角度解釋了本題的結果。這裏的論證讓你初嘗運用同餘與互質的滋味，而這些正是初等數論（elementary number theory）的基本功。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本很出色的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。