詳細解答

STEP I 2015，第 7 題

純數學 • 區間上的最大值

> **STEP I 2015，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q7

關鍵思路

光滑函數（smooth function）在閉區間（closed interval）上的最大值，必定在區間內部的駐點（stationary point）或在端點（endpoint）取得。這裏的駐點是 $x = 0$ 和 $x = \frac{a}{3}$，而後者會隨着 a 增大向右移動，最終離開區間。因此我們先列出所有候選值，再隨着 a 變化逐一比較：三個範圍正是來自比較結果轉換之處，以及 $\frac{a}{3}$ 越過 $x = 1$ 之處。

解答

候選值

求導，得

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

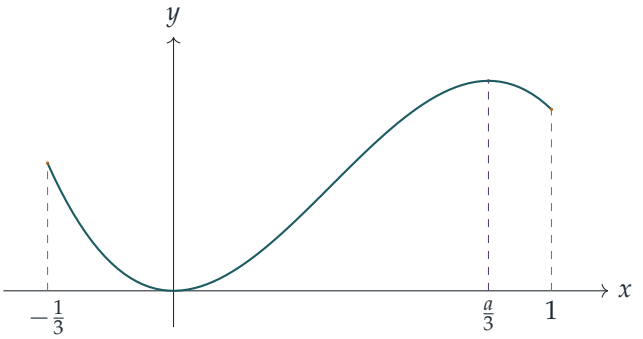
所以駐點是 $x = 0$ 和 $x = \frac{a}{3}$。當 $a \geq 0$ 時，f' 的正負號告訴我們函數的形狀：

- 當 $x < 0$ 時，$6x < 0$ 而 $a - 3x > 0$，所以 $f'(x) < 0$，f 遞減；
- 當 $0 < x < \frac{a}{3}$ 時，$f'(x) > 0$，f 遞增；
- 當 $x > \frac{a}{3}$ 時，$f'(x) < 0$，f 遞減。

所以 $x = 0$ 是局部極小值（local minimum）點，$x = \frac{a}{3}$ 是局部極大值（local maximum）點（當 $a = 0$ 時兩者重合，而 $f = -6x^3$ 處處遞減）。我們需要的函數值是

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9}, \qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{a^3}{9}, \qquad f(1) = 3a - 6.$$

由於 f 在 $[-\frac{1}{3}, 0]$ 上遞減，這一段上的最大值是 $f(-\frac{1}{3})$；而 $f(0) = 0$ 永遠不會是最大值。所以 $\mathrm{M}(a)$ 就是 $f(-\frac{1}{3})$ 與 f 在 $[0, 1]$ 上最大值兩者中較大的一個。



上圖顯示 $a = \frac{5}{2}$ 的情況：三個候選值是兩個端點（琥珀色）和局部極大值（紫紅色），在這裏勝出的是局部極大值。

情況 $0 \le a \le 3$

此時 $\frac{a}{3} \in [0,1]$，所以在 $[0,1]$ 上函數先上升至 $x = \frac{a}{3}$，然後下降。它在這一段上的最大值是 $f(\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{9}$，我們要把它與 $f(-\frac{1}{3})$ 比較：

$$\frac{a^3}{9} - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{a^3 - 3a - 2}{9} = \frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

? **想一想** 怎樣看出 $a^3 - 3a - 2$ 的因式分解（factorisation）？

試代入一些小整數：$a = -1$ 給出 $-1 + 3 - 2 = 0$，$a = 2$ 給出 $8 - 6 - 2 = 0$。三個根之和是 0（因為沒有 a^2 項），所以第三個根又是 -1，於是得到 $(a+1)^2(a-2)$。

由於當 $a \ge 0$ 時 $(a+1)^2 > 0$，差的正負號與 $a - 2$ 相同。因此

$$\mathrm{M}(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{當} 0 \le a \le 2, \qquad \mathrm{M}(a) = \frac{a^3}{9} \quad \text{當} 2 \le a \le 3,$$

而兩條公式在 $a = 2$ 時都給出 $\frac{8}{9}$。

情況 $a > 3$

此時 $\frac{a}{3} > 1$，所以 f 在整個 $[0,1]$ 上遞增，它在這一段上的最大值是 $f(1) = 3a - 6$。與左端點比較，

$$(3a - 6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a - 7),$$

由於 $a > 3 > \frac{7}{3}$，這個值是正數。所以當 $a \ge 3$ 時 $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$；在 $a = 3$ 時它等於 $3 = \frac{27}{9}$，與中間那條公式吻合。

結論

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \le a \le 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \le a \le 3, \\ 3a - 6, & a \ge 3. \end{cases}$$

換句話說：a 較小時左端點勝出，a 適中時局部極大值勝出，而一旦局部極大值離開了區間，就由右端點勝出。

驗算

- M 是連續（continuous）的：在 $a = 2$ 時兩邊都是 $\frac{8}{9}$，在 $a = 3$ 時兩邊都是 3。這是必然的，因為最大值隨 a 連續變化。
- $a = 0$：$f(x) = -6x^3$ 遞減，所以其最大值是 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$，與第一條公式一致。
- $a = \frac{5}{2}$：公式給出 $\frac{125}{72} \approx 1.736$，而兩個端點分別給出 $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$ 和 $f(1) = 1.5$，兩者都較小。以電腦在精細的 x 網格上搜尋，對 0 至 12 之間數百個 a 值進行驗算，結果與公式的誤差在 10^{-8} 以內。

常見錯誤

- 忘記了左端點 $x = -\frac{1}{3}$。由於 f 在 $x < 0$ 時遞減，這個端點有可能勝過局部極大值，而當 $a < 2$ 時確實如此。
- 在 $a > 3$ 時仍使用 $f(\frac{a}{3})$，但此時 $\frac{a}{3}$ 已在區間之外，因此不能採用。
- 以為局部極大值自然就是區間上的最大值。

STEP 之外

這裏的 $\mathrm{M}(a) = \max_{x \in [-1/3,\, 1]} f(x)$ 是透過對一族函數求最優值而定義的函數，這類函數通常是連續的，但只是分段光滑（piecewise smooth）：你可以驗證 M 在 $a = 2$ 處的左導數與右導數並不相等。至於閉有界區間上的連續函數必定能取得最大值，這就是極值定理（Extreme Value Theorem），會在第一門分析課中證明；參見 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。