詳細解答

STEP I 2015，第 6 題

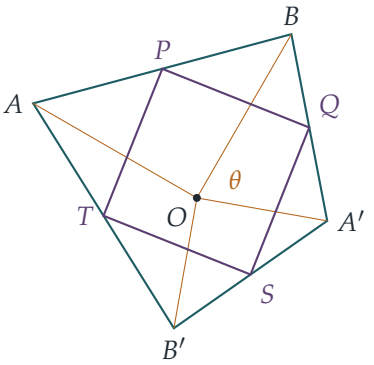
純數學 • 幾何中的向量

> **STEP I 2015，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q6

關鍵思路

以 O 為原點，條件 $OA = OB$ 及 $\angle AOB = 90°$ 表示 B 是 A 繞 O 旋轉（rotation）一個直角所得的點；同樣地，B' 是 A' 以相同方向旋轉所得的點。把這個四分之一轉記作 R。於是中點四邊形的每一條邊，原來都是前一條邊經 R 作用後的結果，而這正正就是構成正方形的條件。一旦以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 表示出邊長，面積就只是一道餘弦定理（cosine rule）的計算。

解答



中點構成正方形

取 O 為原點，並以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ 表示 A, B, A', B' 的位置向量（position vector）。設 R 為繞 O 順時針旋轉 90°。它是線性（linear）的，保持長度不變，並把每個非零向量轉過一個

直角。

由於頂點按順時針方向排列，而 O 位於四邊形內部，從 OA 到 OB 是順時針轉 $90°$。又因 $OA = OB$，得 $\mathbf{b} = R\mathbf{a}$。同理 $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$。

設 P, Q, S, T 分別為 AB、BA'、$A'B'$、$B'A$ 的中點：

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

現在逐一考慮四條邊。設 $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

這裏 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，因為 $A \neq A'$。所以 PQ 與 ST 大小相等、方向相反，故 $PQST$ 是平行四邊形（parallelogram）。它的鄰邊 QS 是把 $\mathbf{u}$ 轉過一個直角而長度不變所得。鄰邊相等且互相垂直的平行四邊形是正方形，因此 $PQST$ 是正方形，得證。

> **想一想** 為甚麼把 A 轉到 B 的四分之一轉，必定與把 A' 轉到 B' 的是同一個？

兩對點在順時針標記中都是前後相連的，而 O 位於內部，所以兩種情況下由第一條射線轉到第二條射線都是順時針方向。若其中一個是順時針而另一個是逆時針，由 $\overrightarrow{QS}$ 得出 $R\mathbf{u}$ 的那一步便不成立，而一般來說所得圖形也不會是正方形。

求面積的最大值

設 $OA = OB = p$ 及 $OA' = OB' = q$，兩者皆固定，並設 $\theta = \angle BOA'$。O 處的四個角之和為 $360°$，其中兩個是直角，所以 $\angle B'OA = 180° - \theta$。由於 O 位於內部，θ 和 $180° - \theta$ 都嚴格介乎 $0°$ 與 $180°$ 之間，故 $0 < \theta < 180°$。

正方形的邊長為 $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$，所以面積為 $\frac{1}{4}AA'^2$。由 OA 經 OB 轉到 OA'，$\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{a}'$ 之間的夾角為 $90° + \theta$，而 $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$。由餘弦定理（或展開 $|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^2$），

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90° + \theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

所以

$$\text{面積} = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

在 p 和 q 固定的情況下，當 $\sin\theta$ 最大時此式最大。在 $0 < \theta < 180°$ 上，這恰好發生於

$$\angle BOA' = \theta = 90°,$$

而最大面積為 $\frac{1}{4}(p+q)^2$。此時 O 處的四個角全是直角，所以 A' 位於 AO 越過 O 的延長線上，而正方形的邊長為 $\frac{1}{2}(p+q)$。

驗算

- 取 $p = 2$、$q = 3$。面積公式給出 $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$，在 $\theta = 0$ 附近為 3.25，在 $\theta = 90°$ 時升至 $6.25 = \frac{1}{4} \cdot 5^2$，然後回落至接近 3.25。以電腦對 θ 作精細掃描，得出峯值位於 90.0°。
- 對稱情況 $p = q$、$\theta = 90°$：$ABA'B'$ 本身就是一個以 O 為中心、邊長為 $p\sqrt{2}$ 的正方形，而其中點正方形的邊長為 p，面積為 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$，與公式相符。
- 隨機選取 p、q 和 θ，經電腦驗證，各中點確實構成面積為 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$ 的正方形。

常見錯誤

- 把 OA 與 OA' 之間的夾角當作 θ，而不是 $90° + \theta$。這會得出面積 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$，並錯誤地推斷 θ 應趨近 180°。
- 只證明四條邊相等。這只能得出菱形（rhombus）。你還需要一個直角，而這裏由 $\overrightarrow{QS} = R\,\overrightarrow{PQ}$ 便可直接得到。

STEP 之外

旋轉一個直角是一個線性映射（linear map）$R(x, y) = (y, -x)$，在複平面（complex plane）上則是乘以 $-\mathrm{i}$。整個論證其實是一道關於線性映射的計算：$\mathbf{q} - \mathbf{p}$ 與 $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ 相差一個 R，因為 R 與減法可交換（commute）。同樣的思路可以迅速證明拿破崙定理（Napoleon's theorem）和 van Aubel 定理（van Aubel's theorem）等結果。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）正是以這種方式，透過複數乘法來發展幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。