詳細解答

# STEP I 2015，第 5 題

純數學 • 含參數的積分

> **STEP I 2015，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q5

## 關鍵思路

兩個積分在把 $x$ 視為固定參數（parameter）時，對 $t$ 都有初等的原函數（antiderivative），所以題目中「通過計算積分」這句指示已經是全部提示：先求出關於 $x$ 的閉式（closed form），再作其草圖。要小心的是細節。在 (i) 中，被積函數（integrand）在 $t = 1$ 處可能無界（unbounded）；在 (ii) 中，平方根計算出來是絕對值（*absolute values*），這使 $g$ 成為一個分段函數（piecewise function），而其形狀出奇地簡單。

## 解答

### 第 (i) 部分

對固定的 $x > 0$，$(t-1)^{x-1}$ 的一個原函數是 $\frac{1}{x}(t-1)^x$。因此

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

當 $0 < x < 1$ 時，被積函數 $(t-1)^{x-1}$ 在 $t \to 1^+$ 時趨於無窮，所以這是一個反常積分（improper integral）；但由於 $x > 0$，當 $t \to 1^+$ 時 $(t-1)^x \to 0$，所以積分收斂（converges），上面的值仍然成立。

現在作 $y = 2^x/x$（$x > 0$）的草圖。

- 當 $x \to 0^+$ 時，$2^x \to 1$，所以 $f(x) \to +\infty$：$y$ 軸是一條漸近線（asymptote）。
- 當 $x \to \infty$ 時，指數函數的增長勝過冪函數，所以 $f(x) \to \infty$（而且比任何直線都快）。

- 求導，利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$，

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2},$$

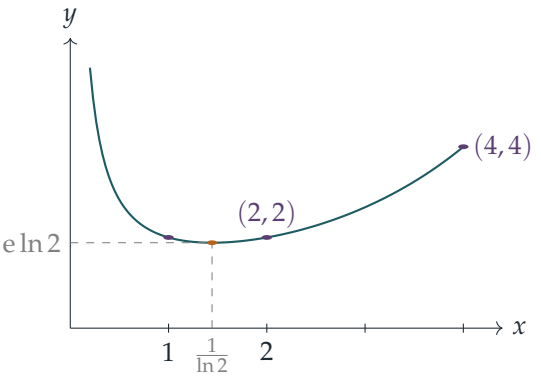
它在 $x < 1/\ln 2$ 時為負，在 $x > 1/\ln 2$ 時為正。所以只有一個駐點（stationary point），是一個極小點（minimum），位於 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$。

- 在該點，$2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$，所以極小值為

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e} \ln 2 \approx 1.88.$$

- 有用的點：$f(1) = f(2) = 2$，$f(4) = 4$。

這條曲線也是凸(convex)的：$\ln f(x) = x \ln 2 - \ln x$ 是凸函數(其二階導數為 $1/x^2 > 0$)，而凸函數的指數仍是凸函數。所以草圖是一條單一的 U 形曲線。




**第 (ii) 部分**

首先，被積函數是有意義的：對 $-1 \le t \le 1$，

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

等號只在 $|x| = 1$ 且 $t = \pm 1$（端點）時成立。這個情況我們稍後再處理。

當 $x = 0$ 時，被積函數為 1，所以 $g(0) = 2$。當 $x \ne 0$ 時，把 $x$ 視為常數：由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$，一個原函數是 $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$。因此

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

? **想一想** 為甚麼不直接寫 $\sqrt{(1+x)^2} = 1 + x$ 和 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$？

因為 $\sqrt{u^2} = |u|$，而不是 $u$。粗心地這樣做會得出對所有 $x$ 都有 $g(x) = 2$，這在 $|x|$ 很大時肯定是錯的，因為那時被積函數約為 $1/|x|$，所以 $g(x) \approx 2/|x|$。我們必須分情況討論。

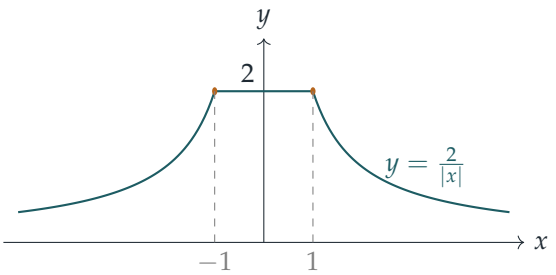
- $-1 \le x \le 1$，$x \neq 0$：$1+x$ 和 $1-x$ 都 $\ge 0$，所以 $g(x) = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x} = 2$。這也與 $g(0) = 2$ 一致。
- $x > 1$：$|1+x| = 1+x$ 而 $|1-x| = x-1$，所以 $g(x) = \dfrac{2}{x}$。
- $x < -1$：$|1+x| = -1-x$ 而 $|1-x| = 1-x$，所以 $g(x) = \dfrac{-2}{x} = \dfrac{2}{|x|}$。

在 $x = \pm 1$ 時，被積函數在其中一個端點無界（當 $x = 1$ 時它是 $1/\sqrt{2-2t}$，在 $t \to 1$ 時趨於無窮），所以這是反常積分。原函數 $-\sqrt{2-2t}$ 直到 $t = 1$ 都是連續的，所以積分收斂，而公式仍然給出 $g(\pm 1) = 2$。

所以

$$g(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

這個函數是偶函數（even function）（這是必然的：把 $t$ 換成 $-t$ 即可證明 $g(-x) = g(x)$）。它處處連續（continuous），在 $[-1, 1]$ 上為常數，並以 $2/|x|$ 的方式衰減，趨向漸近線 $y = 0$。在 $x = \pm 1$ 處有一個尖角：兩側的單側斜率分別為 0（內側）和 $\mp 2$（外側），所以 $g$ 在該處不可微（differentiable）。




## 驗算

- 第 (i) 部分取 $x = 1$：被積函數為 1，所以 $f(1) = 2$，與 $2^1/1$ 吻合。取 $x = 2$ 時積分為 $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$，與 $2^2/2$ 吻合。
- 第 (ii) 部分取 $x = 0$：被積函數為 1，而 $g(0) = 2$。當 $|x|$ 很大時，被積函數在長度為 2 的區間上接近 $1/|x|$，與 $2/|x|$ 吻合。

- 數值上，$\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$；(ii) 中的積分在 $x = 1.2$ 時算得 $1.6667 = 2/1.2$，在 $x = 0.8$ 時算得 2.0000。

## 常見錯誤

- 對所有 $x$ 都寫 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$，從而得出 $g$ 是常數的結論。
- 忘記 (i) 中的積分在 $0 < x < 1$ 時是反常積分，或忘記 $(t-1)^x$ 在 $t = 1$ 處為零只是因為 $x > 0$。
- 把 $g$ 在 $x = \pm 1$ 處畫成光滑的：兩段曲線以不同的斜率相接。

## STEP 之外

第 (ii) 部分其實是喬裝了的牛頓（Newton）殼層定理（shell theorem）。設 $t = \cos\theta$，則 $1/\sqrt{1-2xt+x^2}$ 是從距單位球面球心 $x$ 的一點到球面上一點的距離的倒數，所以 $g$（相差一個常數）就是均勻球殼的引力勢（gravitational potential）：在殼內為常數，在殼外則等同一個點質量的引力勢。同一個式子也是勒讓德多項式（Legendre polynomials）的生成函數（generating function）$\sum_n P_n(t)x^n$，而 $|x| < 1$ 時 $g(x) = 2$ 反映了一個事實：每個 $n \geq 1$ 的 $P_n$ 在 $[-1,1]$ 上的積分都是零。第 (i) 部分把 $x$ 當作參數來積分 $t^{x-1}$，正是通往伽瑪函數（Gamma function）和貝塔函數（Beta function）的第一步。Mary Boas 的 *Mathematical Methods in the Physical Sciences*（《物理科學中的數學方法》）以恰到好處的程度介紹了勒讓德多項式和伽瑪函數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。