詳細解答

STEP I 2015，第 4 題

純數學 • 參數曲線與面積

STEP I 2015，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q4

關鍵思路

以曲線的斜率（gradient）作為參數。若中點處的切線（tangent）與 x 軸成角 θ，則該處的斜率為 $\tan\theta$，由此便確定了中點的位置。棒的每一端都沿單位向量（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向與中點相距 b。至於面積，半條棒 AP 正好落在 P 點的切線上，所以所求區域其實就是拋物線（parabola）與它的一條切線之間的空隙，而對應的被積函數（integrand）是一個完全平方（perfect square）。

解答

一端的軌跡

設中點為 P，並設棒與 x 軸正方向成角 θ。由於 $y = \frac{1}{4}x^2$ 有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$，而棒在 P 點與曲線相切，故

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{故} \qquad P = (2\tan\theta,\ \tan^2\theta).$$

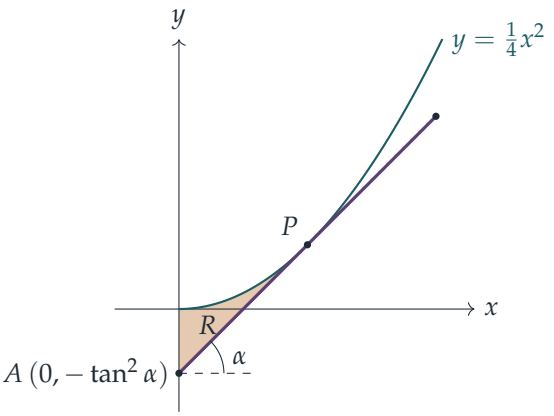
條件 $x \geq 0$ 給出 $\tan\theta \geq 0$，因此可取 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$。當 θ 在這個範圍內變動時，$2\tan\theta$ 取遍 $[0, \infty)$ 中的每一個值，所以中點的每一個位置都恰好對應一個 θ。

沿棒方向的單位向量是 $(\cos\theta, \sin\theta)$，而每一端與 P 相距 b，所以兩端位於 $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$。取負號（即較低、靠左的一端），得

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

正如所求。（另一端所描出的軌跡滿足相同的方程，只是把 $-b$ 換成 $+b$。）

R 的面積



到達 y 軸的是滿足 $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$ 的那一端：另一端的 $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$ 恆成立。所以當 $\theta = \alpha$ 時，

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A 的 y 坐標是 $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$，利用上一條方程可消去 b：

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{故} \qquad A = (0, -\tan^2\alpha).$$

? **想一想** A 相對於原點在甚麼位置？直線 AP 的方程是甚麼？

A 位於原點下方，而直線 AP 正是拋物線在 P 點的切線。記 $t = \tan\alpha$。在 $P = (2t, t^2)$ 的切線斜率為 t，所以其方程為

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

它確實經過 $A = (0, -t^2)$。拋物線位於這條切線上方，因為

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \geq 0.$$

因此 R 是滿足 $0 \leq x \leq 2t$、並介乎直線 AP（下方）與曲線（上方）之間的點的集合，其左邊界是 y 軸上由 A 向上至 O 的線段。所以

$$\begin{aligned} \text{面積}R &= \int_0^{2t} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{2t} (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x - t)^3\right]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3. \end{aligned}$$

所以 R 的面積是 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$，正如所求。

留意 b 完全消失了：面積只取決於 P 點的切線與 y 軸相交的位置。當然，b 與 α 之間有關係式 $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$，所以 b 決定了 α。

驗算

- 取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（如圖所示）。由 $b\cos\alpha = 2$ 得 $b = 2\sqrt{2}$，此時 $P = (2,1)$，$A = (0,-1)$。面積為 $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$。
- 當 $b = 2$ 時，以數值方法解 $2\tan\alpha = 2\cos\alpha$ 得 $\alpha \approx 0.6662$，而用數值積分求得的面積是 0.32391，與 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ 吻合。
- 當 $b \to 0$ 時，$\alpha \to 0$，區域縮小至消失，與公式的預測一致。

常見錯誤

- 在 x 軸處把區域分開，卻忘記了 x 軸下方的三角形。在切線與曲線之間取單一個積分，便能一次過處理兩部分。
- 用錯了棒的一端：帶 $+b\cos\theta$ 的那一端永遠不會到達 y 軸。
- 答案中留下了 b，而沒有利用 $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$ 把它消去。

STEP 之外

中點描出拋物線，而每一端則描出一條沿切線方向保持固定距離 b 的曲線。由舊曲線的切線構造新曲線，是平面曲線微分幾何（differential geometry）的一個常見主題（漸伸線（involute）、包絡線（envelope）和曳物線（tractrix）都是經典例子），大學一年級課程中會與弧長（arc length）和曲率（curvature）一併學到。這個面積的簡潔答案令人想起阿基米德（Archimedes）對拋物線的求積：他證明了拋物線弓形的面積是某個內接三角形面積的 $\frac{4}{3}$ 倍。如想做更多同類題目，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。