詳細解答

STEP I 2015，第 3 題

純數學 • 坐標幾何中的可見性

STEP I 2015，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

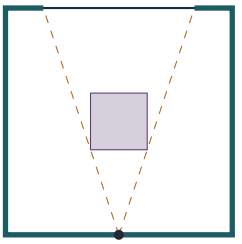
step.maths.org/questions/15-s1-q3

關鍵思路

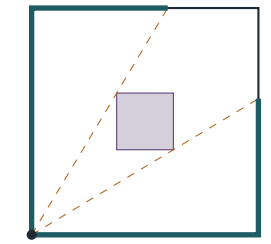
守衛的視線會被建築物擋住；由於建築物是一個凸（convex）正方形，剛好擦過建築物某個角的直線，就標示出牆上可見部分的終點。因此，對每個位置，我們畫出這些擦角線，找出它們與周界（perimeter）的交點，再把可見的長度加起來。所有工作都靠相似三角形（similar triangles）（或直線方程）完成。數值 $3a$ 的出現，是因為當 b 取這個值時，從牆中點出發的擦角線剛好到達庭院的一個角。

解答

把原點放在中心，於是周界牆是邊在 $x = \pm\frac{b}{2}$、$y = \pm\frac{b}{2}$ 上的正方形，而建築物是正方形 $|x| \le \frac{a}{2}$、$|y| \le \frac{a}{2}$，其中 $0 < a < b$。周界的總長度是 $4b$。守衛能看見牆上的點 Q，當且僅當由守衛到 Q 的線段不穿過建築物。



牆的中點（$b > 3a$）



角落

牆上加粗（青色）的部分是守衛能看見的部分；虛線擦過建築物的角。

守衛在牆的中點

設守衛在 $G = (0, -\frac{b}{2})$，即底牆的中點。整幅底牆都可見，因為建築物嚴格位於它的上方：長度為 b。由於圖形關於 y 軸對稱（symmetry），我們只需看右邊。

一條向右上方的視線不碰到建築物，當且僅當它從最接近它的角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ 的右邊經過。（這條直線先遇到 $y = -\frac{a}{2}$，而且它的 x 坐標隨高度上升而增加；所以如果它在高度 $-\frac{a}{2}$ 處位於建築物右邊，就會一直留在右邊；如果它在該處位於 K 的左邊，它便會進入建築物，因為在高度 $-\frac{a}{2}$ 處它的 x 坐標介乎 0 與 $\frac{a}{2}$ 之間。）因此 G 所見範圍的邊界是直線 GK，它在水平距離 $\frac{a}{2}$ 內上升 $\frac{b-a}{2}$，所以斜率（gradient）是 $\frac{b-a}{a}$。

這條直線在以下高度與右牆 $x = \frac{b}{2}$ 相交：

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

它到達該牆頂端（$y_1 \geq \frac{b}{2}$）當且僅當 $\frac{b-a}{a} \geq 2$，即 $b \geq 3a$。

> **想一想** 為甚麼 b 與 $3a$ 的比較會在這裡出現？

它決定擦角線 GK 撞上哪一幅牆：若 $b < 3a$，撞上右牆；若 $b > 3a$，則撞上遠端（頂部）的牆。兩種情況給出不同的可見長度公式。

情況 $b < 3a$。守衛看見右牆從底角至高度 y_1 的部分，長度為

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

此外便看不見其他部分（任何連向該牆更高點或頂牆的直線，都從 K 的左邊經過）。加上左邊對應的一段，總可見長度為

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

情況 $b > 3a$。這時整幅右牆（長度 b）都可見，而直線 GK 上升 b 後與頂牆 $y = \frac{b}{2}$ 相交，交點為

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

由於 $2a < b - a$，這個值小於 $\frac{b}{2}$。守衛看見頂牆由該點至角落的部分，長度為 $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$。把底牆、兩幅側牆和頂牆的兩段加起來：

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a) + b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

守衛在角落

設守衛在 $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$。經過 H 的兩幅牆完全可見：長度為 $2b$。圖形關於對角線 $y = x$ 對稱，所以只看右牆。按照與前面相同的論證，可見部分由經過 H 與角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$

的直線截斷，其斜率為

$$\frac{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}}=\frac{b-a}{b+a}.$$

在到達牆 $x=\frac{b}{2}$ 的水平距離 b 內，它上升 $\frac{b(b-a)}{a+b}$，這個值小於 b，所以無論 a 和 b 取甚麼值，這條直線總是撞上右牆。守衛看見右牆長度 $\frac{b(b-a)}{a+b}$ 的部分，頂牆亦看見同樣長度，兩幅牆的其餘部分都看不見。因此

$$C=2b+\frac{2b(b-a)}{a+b}=\frac{2b(a+b)+2b(b-a)}{a+b}=\frac{4b^2}{a+b}.$$

比較兩個位置

情況 $b<3a$。

$$C-M=\frac{4b^2}{a+b}-\frac{b^2}{a}=\frac{b^2(4a-(a+b))}{a(a+b)}=\frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)}>0,$$

所以**角落**較佳。

情況 $b>3a$。

$$M-C=\frac{b(4b-6a)}{b-a}-\frac{4b^2}{a+b}=\frac{b[(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)]}{(b-a)(a+b)}=\frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)}>0,$$

因為 $(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)=4b^2-2ab-6a^2-4b^2+4ab=2ab-6a^2$。所以**牆的中點**較佳。

當 $b=3a$ 時，M 的兩條公式都給出 $9a$，而 $C=\frac{36a^2}{4a}=9a$ 亦然，所以兩個位置一樣好。

驗算

- 取 $a=1$、$b=2$：$M=4$，$C=\frac{16}{3}\approx 5.33$，所以角落勝出。取 $a=1$、$b=5$：$M=\frac{5\cdot 14}{4}=17.5$，$C=\frac{100}{6}\approx 16.67$，所以中點勝出。這些數值已由電腦驗算證實，該驗算測試了通往牆上數千個點的視線。
- 若 $b\to a$，建築物填滿整個庭院：$M\to a$（只有守衛所在的牆）而 $C\to 2a$（在角落相交的兩幅牆），正如預期。
- 當 $b\to\infty$ 時，建築物變得微不足道：$M=\frac{b(4b-6a)}{b-a}$ 與 $C=\frac{4b^2}{a+b}$ 都趨近整個周界 $4b$，而且都一直小於它。

常見錯誤

- 忘記當 $b>3a$ 時，在牆中點的守衛除了兩幅側牆，還能看見對面牆的一部分。

- 擦錯建築物的角：從下方看，起作用的是底部的兩個角 $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$。
- 總長度中漏掉守衛自己所在的牆（或兩幅牆）。

STEP 之外

關於從某點能看見區域哪些部分的問題，屬於計算幾何（computational geometry）的範疇：經典的「美術館定理」（art gallery theorem）指出，要監看一個有 n 幅牆的多邊形展覽館的每一點，$\lfloor n/3 \rfloor$ 名守衛總是足夠，而有時亦確實需要這麼多。像這裡那樣求出可見區域（visibility region），是這類問題的基本步驟；在電腦圖形學中亦然，隱藏面消除（hidden-surface removal）就是以同樣方式運作。如想做更多這類風格的題目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學高階問題》）是很好的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。