詳細解答

STEP I 2015，第 2 題

純數學 • 三次方程的三角解法

> **STEP I 2015，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q2

關鍵思路

三次式（cubic）$4x^3 - 3x$ 正正就是三倍角公式（triple-angle formula）所給出的形式：$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$。因此，這種形式的三次方程可以透過猜一個餘弦值來求解。一旦知道其中一個根（root），便可以因式分解（factorise），再解餘下的二次方程（quadratic）。在最後一部分，代換 $y = 2x$ 把題目給出的三次方程化成這種形式，而第 (i) 部分則提供了我們所需的準確值。

解答

第 (i) 部分

把 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ 寫出，並使用複角公式（compound-angle formulae）：

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

此即所求。同樣地，

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

把分母有理化（rationalising the denominator）後，得到等價的形式

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

這兩個形式在第 (iii) 部分會更方便使用。

第 (ii) 部分

設 $c = \cos\alpha$ 及 $s = \sin\alpha$。展開 $\cos(2\alpha + \alpha)$，

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

所以 $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$：$x = \cos\alpha$ 是一個根。

至於其餘的根，把 $\cos 3\alpha$ 換成 $4c^3 - 3c$，然後因式分解：

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3).\end{aligned}$$

? **想一想** 該如何化簡這個二次因式的判別式？

利用 $c^2 + s^2 = 1$，判別式（discriminant）為 $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$。它的平方根是 $4\sqrt{3}\,|s|$，但由於我們同時取 $\pm$ 兩個符號，所以可以略去絕對值。二次公式（quadratic formula）給出

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

因此另外兩個根是

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{及} \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

它們就是 $\cos(\alpha - 120°)$ 和 $\cos(\alpha + 120°)$。這是合理的：$3(\alpha \pm 120°) = 3\alpha \pm 360°$，所以這兩個角的 $\cos 3\theta$ 與 α 的相同。

第 (iii) 部分

? **想一想** 題目給出的三次式是 $y^3 - 3y - \sqrt{2}$，而不是 $4x^3 - 3x - \cdots$。該如何把兩者配合起來？

我們希望三次項與一次項的係數（coefficient）之比為 4 比 3，與第 (ii) 部分一樣。設 $y = 2x$：

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

這正是第 (ii) 部分的方程，其中 $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$，所以可以取 $\alpha = 15°$。第 (ii) 部分於是給出三個根 x。它們互不相同（見下文），因此就是這個三次方程的全部根，而

由 $y = 2x$ 得

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

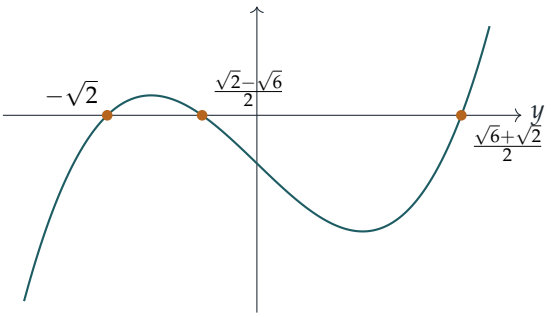
現在代入第 (i) 部分的值。

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$，化簡後得 $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$。

這裏用了 $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$。這三個值顯然互不相同。所以解為

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

以角度表示，它們分別是 $2\cos 15^\circ$、$2\cos 255^\circ$ 及 $2\cos 135^\circ$。



驗算

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ 的 y^2 係數為零，所以各根之和必為零。的確，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$。
- 各根之積應為 $\sqrt{2}$。由於 $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$，各根之積為 $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$。
- 根 $y = -\sqrt{2}$ 很容易直接驗證：$-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$。以數值計算，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$，而 $(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$。
- 在第 (ii) 部分中，$\alpha = 0$ 給出方程 $4x^3 - 3x - 1 = 0$，即 $(x-1)(2x+1)^2 = 0$。公式給出的根為 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$，與預期相符。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分忘記作伸縮代換，結果解了 $4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$。這個方程需要 $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$，這是不可能的。
- 給出 x 的答案，而不是 $y = 2x$ 的答案。
- 寫出 $\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$，卻沒有指出 $\pm$ 號已照顧到 $\sin\alpha < 0$ 的情況。

STEP 之外

這是解有三個實根的三次方程的三角方法，歸功於韋達（Viète）。任何三次方程都可以經平移消去平方項，得到 $t^3 + pt + q = 0$。當 $p < 0$ 時，伸縮代換 $t = 2\sqrt{-p/3}\,x$ 把它化成 $4x^3 - 3x = k$。在這種情況下，卡爾達諾（Cardano）公式幫不上忙，因為即使三個根全是實數，它也要經過負數的平方根。弄明白為何會這樣，以及為何餘弦技巧能避開這個問題，便會自然地引向複數（complex numbers）和單位根（roots of unity）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對此給出了優美的幾何圖像。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。