詳細解答

STEP I 2015，第 13 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP I 2015，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q13

關鍵思路

以第一個 6 出現的時間作條件（conditioning）。若已知第一個 6 出現在第 n 次投擲，則之前的 $n-1$ 次投擲各自獨立，且每次同樣可能是 $1,\ldots,5$ 中任何一個；於是關於第一個 6 之前出現的 4 和 5 的問題，就變成普通的二項分佈（binomial distribution）問題。再對 n 求和，便得到幾何級數（geometric series）及其導數，而這正是提示中二項展開式（binomial expansion）派上用場之處。

解答

各次投擲互相獨立，每一面的概率均為 $\frac{1}{6}$。記第一個 6 出現在第 n 次投擲這事件為 A，並寫 $p_n = \mathrm{P}(A)$。

第 (i) 部分

第一個 6 出現在第 n 次投擲，當且僅當第 $1,\ldots,n-1$ 次投擲都不是 6，而第 n 次投擲是 6。由獨立性，

$$\mathrm{P}(A) = p_n = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

條件化的關鍵事實。 在 A 發生的條件下，對第 $1,\ldots,n-1$ 次投擲，我們只知道它們「不是 6」。由於骰子公平而各次投擲獨立，這 $n-1$ 次投擲互相獨立，且每次都在 $\{1,2,3,4,5\}$ 上均勻分佈。之後每一部分都會用到這一點，並配合全概率定律（law of total probability）$\mathrm{P}(X) = \sum_n \mathrm{P}(X \mid A)\, p_n$。

第 (ii) 部分

較容易的做法是求 $\mathrm{P}(B')$，即在第一個 6 之前沒有出現 5 的概率。在 A 的條件下，之前 $n-1$ 次投擲每次避開 5 的概率為 $\frac{4}{5}$，所以

$$\mathrm{P}(B') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

因此 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

由容斥原理（inclusion–exclusion principle）（以補集形式表示），

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(C') + \mathrm{P}(B' \cap C').$$

由 4 和 5 兩面之間的對稱性，$\mathrm{P}(C') = \mathrm{P}(B') = \frac{1}{2}$。至於 $B' \cap C'$，在 A 的條件下，之前每次投擲都必須同時避開 4 和 5，概率為 $\frac{3}{5}$：

$$\mathrm{P}(B' \cap C') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

所以 $\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$。

第 (iv) 部分

在 A 的條件下，之前 $n-1$ 次投擲中 5 的個數服從 $\mathrm{B}(n-1, \frac{1}{5})$，所以

$$\mathrm{P}(D \mid A) = (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

而當 $n = 1$ 時此概率為 0。因此

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6}.$$

抽出一個因子 $\frac{5}{6}$，其餘兩兩配對：$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 及 $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$。設 $m = n - 1$，

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{36} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\tfrac{2}{3}\right)^{m-1} = \tfrac{1}{36} \left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-2} = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4},$$

這裏用了題目所給、指數為 -2 的展開式：$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$。

? **想一想** 怎樣才能求得 $\mathrm{P}(D \cup E)$，而無須逐一列出其中一個或兩個事件同時發生的所有情況？

第 (v) 部分

利用 $\mathrm{P}(D\cup E)=\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)-\mathrm{P}(D\cap E)$，其中由 4 與 5 的對稱性得 $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(D)=\frac{1}{4}$。所以只需求 $\mathrm{P}(D\cap E)$。

在 A 的條件下，之前 $n-1$ 次投擲中恰有一個 4 和恰有一個 5，即要選定哪一次是 5、哪一次是 4（共 $(n-1)(n-2)$ 種有序選法），而其餘 $n-3$ 次投擲全部落在 $\{1,2,3\}$ 中：

$$\mathrm{P}(D\cap E\mid A)=(n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\qquad (n\geq 3).$$

於是

$$\mathrm{P}(D\cap E)=\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)\tfrac{1}{25}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}.$$

抽出 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$，得常數 $\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$，並有 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$。設 $k=n-3$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D\cap E)&=\tfrac{1}{216}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{2}{216}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)!}{k!\,2!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\\&=\tfrac{1}{108}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-3}=\tfrac{8}{108}=\tfrac{2}{27},\end{aligned}$$

這裏用了題目所給、指數為 -3 的展開式，其 x^k 項的係數為 $\frac{(k+2)!}{k!\,2!}$。因此

$$\mathrm{P}(D\cup E)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{27}=\tfrac{27-4}{54}=\tfrac{23}{54}.$$

驗算

有一個更巧妙的方法可以看出每一個答案，用來驗算再好不過。把所有擲出 1、2、3 的投擲（以及在 (ii) 和 (iv) 中連 4 也一併）忽略掉：它們從不影響這些事件。餘下的相關投擲組成一個序列，其中每個相關的面出現的機會均等。

- (ii)：第一次擲出 5 或 6 時，兩者機會均等，所以 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$。
- (iii)：在 4、5、6 三面之中，每一面同樣可能是最後一個首次出現的，而 $B\cap C$ 正是說 6 最後出現，所以概率為 $\frac{1}{3}$。
- (iv)：D 表示由 5 和 6 組成的序列以 5, 6 開始：概率為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。
- (v)：$D\cap E$ 表示由 4、5、6 組成的序列以 4,5,6 或 5,4,6 開始：概率為 $2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$。

全部五個答案亦已透過電腦模擬 3×10^5 個投擲序列加以確認，模擬得出 $\mathrm{P}(D\cup E)\approx 0.426$，而理論值為 $\frac{23}{54}\approx 0.4259$。

常見錯誤

- 把之前的投擲當作在全部六面上均勻分佈：在 A 的條件下，它們不可能是 6，所以每次是 5 的概率為 $\frac{1}{5}$，而非 $\frac{1}{6}$。
- 在 (v) 中漏了因子 $(n-1)(n-2)$，或者用了 $\binom{n-1}{2}$，後者沒有區分兩次投擲中哪一次是 4。
- 在 (v) 中直接把 $\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)$ 相加，卻沒有減去重疊部分。

STEP 之外

像本題這樣，以一個隨機停時（stopping time）作條件再求和，正是全概率定律最實用的形式；而你遇到的級數，則是負二項分佈（negative binomial distribution）的生成函數（generating function）。「忽略無關投擲」這個驗算方法，體現了一個威力強大的想法：只在有相關事情發生的時刻觀察一個過程，往往比原來的過程簡單得多。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩個想法都有深入發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。