詳細解答

STEP I 2015，第 12 題

概率與統計 • 泊松分佈的稀疏化

STEP I 2015，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q12

關鍵思路

以到達人數作條件（conditioning），需要做手術的人數便成為一個二項（binomial）計數。然後對所有可能的到達人數求和（即全概率定律（law of total probability）），便得出需要做手術人數的分佈，而這個和式會化簡為一個指數級數（exponential series）。至於最後一部分，關鍵事實是：若兩個平均值相同的獨立（independent）泊松（Poisson）計數以其總和作條件，則兩者之間的分配服從二項分佈。

解答

設 X 為某一天到達的傷者人數，Y 為其中需要做手術的人數。

第 (i) 部分

已知 $X = n$，這 n 名傷者各自以概率 $\frac{1}{4}$ 需要做手術，且彼此獨立。所以在此條件下 $Y \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{4})$，而對於 $0 \le r \le n$，

$$\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\frac{3^{n-r}}{4^n}.$$

（若 $r > n$，則概率為 0。）

第 (ii) 部分

固定 $r \geq 0$。由於 $Y = r$ 只可能在 $X \geq r$ 時發生，全概率定律給出

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-8} 8^n}{n!} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

$n!$ 互相抵消。接着把 $8^n = 8^r \cdot 8^{n-r}$ 拆開，使得 $8^r (\frac{1}{4})^r = 2^r$ 及 $8^{n-r}(\frac{3}{4})^{n-r} = 6^{n-r}$：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\, 2^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{6^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\, 2^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!} \qquad (k = n - r) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\, 2^r}{r!}\, \mathrm{e}^6 = \frac{\mathrm{e}^{-2}\, 2^r}{r!}. \end{aligned}$$

此式對每個 $r = 0, 1, 2, \ldots$ 都成立，所以每天需要做手術的人數服從平均值為 $8 \times \frac{1}{4} = 2$ 的泊松分佈（Poisson distribution）。

> **想一想** e^6 從何而來？

把所有只與 r 有關的部分移到和式之外後，剩下的就是 $\sum 6^k / k!$，即 e^6 的指數級數。把 8^n 拆成 $8^r \cdot 8^{n-r}$，正正是令餘下的和式只依賴於 $n - r$ 的關鍵。

第 (iii) 部分

設 M 和 T 分別為星期一和星期二需要做手術的人數。由第 (ii) 部分，兩者均為 $\mathrm{Po}(2)$。由於不同日子的到達人數互相獨立，而傷者是否需要做手術亦彼此獨立，所以 M 與 T 獨立。於是

$$\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) = \frac{\mathrm{P}(M = 8,\ T = 4)}{\mathrm{P}(M + T = 12)}.$$

由獨立性，分子為

$$\mathrm{P}(M = 8)\,\mathrm{P}(T = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^8}{8!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^4}{4!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\, 2^{12}}{8!\,4!}.$$

至於分母，獨立泊松隨機變量之和仍服從泊松分佈，其平均值相加，所以 $M + T \sim \mathrm{Po}(4)$。若不想直接引用這個結果，亦可直接推導：

$$\mathrm{P}(M + T = 12) = \sum_{m=0}^{12} \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^m}{m!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^{12-m}}{(12-m)!} = \frac{\mathrm{e}^{-4} 2^{12}}{12!} \sum_{m=0}^{12} \binom{12}{m} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\, 4^{12}}{12!},$$

當中用了 $\sum_m \binom{12}{m} = 2^{12}$。兩者相除，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) &= \frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!} \cdot \frac{12!}{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}} \\ &= \binom{12}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{495}{4096}.\end{aligned}$$

由於 $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ 是奇數，而 $4096 = 2^{12}$，此分數已是最簡分數（lowest terms）。所以所求概率為 $\dfrac{495}{4096}$。

想一想 為甚麼答案看起來像一個二項概率？

已知總數為 12，由於兩天的平均值相同，這 12 宗手術個案中的每一宗來自星期一或星期二的可能性均等。所以星期一的人數服從 $\mathrm{B}(12, \frac{1}{2})$。留意原本的平均值 8 已完全消失。

驗算

- 第 (ii) 部分的平均值與 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Y \mid X)\big) = \mathrm{E}(X/4) = 2$ 一致。
- 對 $r = 0, \ldots, 14$ 以數值方法計算第 (ii) 部分的級數，結果在捨入誤差範圍內與 $\mathrm{e}^{-2}2^r/r!$ 相同。例如 $\mathrm{P}(Y = 0) = \sum_n \mathrm{e}^{-8}8^n(\frac{3}{4})^n/n! = \mathrm{e}^{-8}\mathrm{e}^{6}$。
- 對 $m = 0, \ldots, 12$，條件概率 $\binom{12}{m}/2^{12}$ 之和為 1，而 $495/4096 \approx 0.121$。以電腦模擬整個模型（泊松到達，然後每人各以概率 $\frac{1}{4}$ 需要做手術），所得數值與此相符。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分中由 $n = 0$ 而非 $n = r$ 開始求和：若到達人數少於 r，就不可能有 r 名傷者需要做手術。
- 在第 (iii) 部分中每天都用 $\mathrm{Po}(8)$。條件是針對手術個案，所以相關的平均值是 2。（在這裏平均值無論如何都會抵消，但推導過程仍應正確。）
- 題目要求最簡分數時，卻把答案寫成 $\binom{12}{8}/2^{12}$ 或 $1980/16384$。

STEP 之外

第 (ii) 部分稱為*稀疏化*（thinning）：若泊松過程（Poisson process）中的每一點各自獨立地以概率 p 保留，則被保留的點構成一個速率乘以 p 的泊松過程，而且，或許令人意外的是，它與被捨棄的點互相獨立。第 (iii) 部分則是其逆向：以總和作條件時，獨立的泊松計數按多項分佈（multinomial distribution）分配。這兩個事實是泊松過程理

論的基礎，你會在大學第一個概率課程中學到。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對兩者均有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。