詳細解答

STEP I 2015，第 11 題

力學 • 摩擦力與力矩

> **STEP I 2015，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q11

關鍵思路

圓柱體上的每一個法向反作用力（normal reaction）都沿半徑方向作用，因此必定通過圓心。所以，對每個圓心取力矩（moments），重力和所有法向反作用力都會消去，只剩下摩擦力（friction）；而這些摩擦力與圓心的距離全部相同。這樣第 (i) 部分幾乎不費吹灰之力便可得出。至於第 (ii) 部分，先對每個圓柱體沿斜面方向分解力，再在題目中兩條不等式所涉及的兩個接觸點應用摩擦定律。

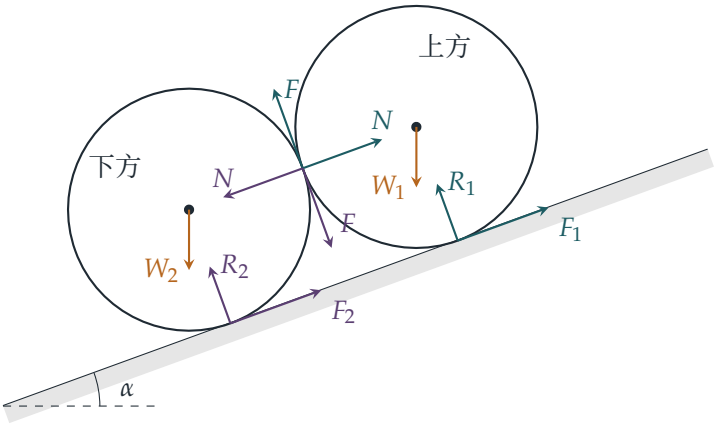
解答

我們把兩個圓柱體視為半徑同為 r 的均勻剛體（rigid body）圓柱，兩者都與斜面接觸，而上方的圓柱體位於斜面較高的位置。由於兩者半徑相等，連接兩圓心的直線與斜面平行，所以兩個圓柱體的接觸點位於斜面上方高度 r 處，與兩個圓心同高。兩圓柱體之間的法向力沿圓心連線（與斜面平行）作用，而它們之間的摩擦力則垂直於斜面。

取 x 方向為沿斜面向上，y 方向為垂直於斜面並指離斜面。設

- R_1、R_2 為斜面對上方及下方圓柱體的法向反作用力；
- F_1、F_2 為斜面對上方及下方圓柱體的摩擦力，以沿斜面向上為正（我們容許它們帶正負號，負值即表示沿斜面向下）；
- N 為下方圓柱體對上方圓柱體的法向力，方向沿斜面向上；
- F 為下方圓柱體對上方圓柱體的摩擦力，以指離斜面為正（同樣帶正負號）。

根據牛頓（Newton）第三定律，上方圓柱體對下方圓柱體施加沿斜面向下的力 N，以及指向斜面的力 F。



作用於上方圓柱體的力以藍綠色表示，作用於下方圓柱體的力則以紫紅色表示。

第 (i) 部分

對上方圓柱體的圓心取力矩。其重力作用於圓心，而 R_1 和 N 都沿半徑作用，所以這些力全都沒有力矩。剩下的只有兩個摩擦力，各自沿切線方向作用，與圓心的距離均為 r：

- F_1 在圓柱體最低點沿斜面向上作用，產生（按圖中方向）逆時針的力矩 rF_1；
- F 在接觸點指離斜面作用，而該接觸點位於圓心靠斜面下方的一側，產生順時針的力矩 rF。

要達至平衡（equilibrium），兩者必須互相抵消，所以 $rF_1 = rF$，即 $F_1 = F$。

想一想 為甚麼對圓心取力矩時可以不理會法向反作用力？

圓上的法向反作用力垂直於接觸點的切線，因此沿半徑方向，其作用線通過圓心，對圓心的力矩為零。正正因為這樣，在這裏對圓心取力矩才是正確的選擇。

同理，對下方圓柱體而言，只有 F_2（在其最低點沿斜面向上，產生逆時針力矩 rF_2）以及在接觸點指向斜面的摩擦力 F（該接觸點位於其圓心靠斜面上方的一側，產生順時針力矩 rF）有力矩。所以 $F_2 = F$。

因此作為帶正負號的量，$F = F_1 = F_2$；特別地，它們的大小相等，得證。

第 (ii) 部分

對每個圓柱體沿平行於斜面的方向分解力：

$$\begin{aligned} \text{上方：}\quad & F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{下方：}\quad & F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

兩式相加，並利用 $F_1 = F_2 = F$，得

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{所以} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

這亦說明每個摩擦力的方向都與我們圖中所畫的一致。代回原式，

$$N = W_1\sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

由於 $W_1 > W_2$ 且 $\alpha > 0$，這是正數，所以兩個圓柱體確實互相壓着。對上方圓柱體沿垂直於斜面的方向分解力，

$$R_1 + F = W_1\cos\alpha, \qquad \text{所以} \qquad R_1 = W_1\cos\alpha - F.$$

想一想 我們實際上需要哪些摩擦不等式？

在平衡狀態下，每個接觸點的摩擦力最多只能是摩擦系數（coefficient of friction）乘以該處的法向反作用力。第一個結果來自兩個圓柱體之間的接觸點，第二個結果則來自上方圓柱體與斜面之間的接觸點。（下方的接觸點會給出涉及 μ_2 的第三個條件，但題目沒有要求。）

*兩個圓柱體之間。*我們需要 $F \le \mu N$：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

除以正數 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

得證。

*上方圓柱體與斜面之間。*我們需要 $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1\cos\alpha - F)$，即

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1\cos\alpha.$$

斜面的傾角滿足 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos\alpha > 0$，而且 $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$。兩者同時除去，得

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

得證。（注意由於 $\mu_1 R_1 \ge F > 0$，這亦迫使 $R_1 > 0$，所以上方圓柱體會一直留在斜面上。）

驗算

- 取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$，我們需要 $\mu \ge 2$；若再取 $\mu_1 = 1$，則需要 $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$。把這類數值代入六條平衡方程（每個圓柱體兩條分解方程和一條力矩方程）並直接求解，所得的 F、N 和 R_1 與上面的結果相同。

- 當 $W_1 \to W_2$ 時，μ 的下界趨向無窮大。這是合理的：此時 $N \to 0$，兩個圓柱體幾乎沒有互相壓着，但它們之間的摩擦力仍然必須是 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$。
- 當 $\mu_1 \to \infty$ 時，該上界變成 $\tan\alpha \leq 2W_1/(W_1 + W_2)$，這正正就是條件 $R_1 \geq 0$：一旦上方圓柱體開始離開斜面，即使斜面完全粗糙也無補於事。

常見錯誤

- 以為兩個圓柱體之間的摩擦力沿斜面方向作用。其實它沿接觸點的公切線作用，而在這裏公切線垂直於斜面。
- 忘記力矩方程。單靠分解力只得出四條方程，卻有六個未知數；確定摩擦力的正是那兩條力矩方程。
- 計算法向反作用力 R_1 時漏掉 F。下方圓柱體的摩擦力把上方圓柱體推離斜面，所以 R_1 小於 $W_1\cos\alpha$。

STEP 之外

剛體處於平衡，當且僅當合力和合力矩同時為零；而巧妙地選擇取力矩的點，是剛體靜力學（rigid-body statics）的主要技巧。在這題中，方程的數目恰好等於未知數的數目；若未知數比方程多，問題便是*超靜定*（statically indeterminate）的，必須為物體如何變形建立模型才能完成求解。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體靜力學和力矩有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。