詳細解答

STEP I 2015，第 10 題

力學 • 相對速度

> **STEP I 2015，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

關鍵思路

雨點打在一個表面上，是一種通量（flux）：單位時間內打中的雨量 =（單位體積內的雨點數目）×（面積）×（雨的速度垂直於該表面的分量）。巴士行駛時，改在巴士的參考系（frame of reference）中考慮，這樣只有雨速的水平分量會改變。然後，就整段行程而言，把速率乘以行程時間 D/u，再對 u 求最小值。絕對值（modulus）把問題分成兩種情況，視乎巴士比雨的水平運動慢還是快。

解答

雨打中巴士的速率

把雨模擬成均勻分佈於空氣中的雨點，每單位體積有 n 點，全部以相同速度運動。設巴士的闊度為 b，並取北方為水平正方向。雨從南方吹來，即向北移動，所以其速度為

$$\text{水平分量} v\cos\theta \text{（向北）}, \qquad \text{鉛直分量} v\sin\theta \text{（向下）}.$$

雨沒有東西方向的分量，所以巴士兩條長邊的側面保持乾爽。

$u = 0$ 的情況。在時間 δt 內，打中車頂的雨點，就是位於一個以車頂為底、鉛直高度為 $v\sin\theta\,\delta t$ 的斜稜柱（prism）之內的雨點，其體積為 $ab\,v\sin\theta\,\delta t$。打中車尾（南面，面積 hb）的雨點，則填滿車尾後方一個水平深度為 $v\cos\theta\,\delta t$ 的稜柱。面向北方的車頭則被遮擋。因此速率為

$$nb\,(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta).$$

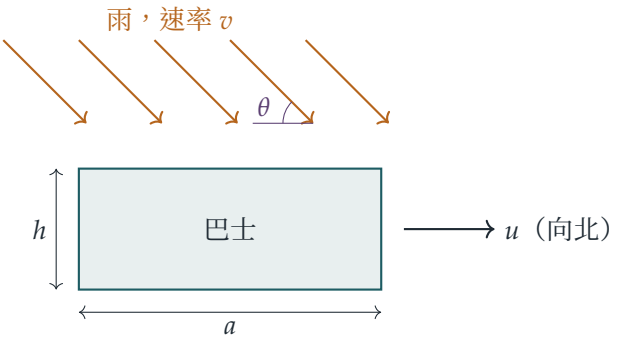
$u > 0$ 的情況。在以等速運動的巴士參考系中，雨的速度為

$$(v\cos\theta - u)\text{ 向北}, \qquad v\sin\theta\text{ 向下}.$$

巴士在這個參考系中靜止，所以上述論證同樣適用，只需把 $v\cos\theta$ 換成 $v\cos\theta - u$。鉛直分量不變，所以車頂收集雨水的速率仍是 $nab\,v\sin\theta$。若 $v\cos\theta > u$，雨仍會追過巴士，以速率 $nhb\,(v\cos\theta - u)$ 打中車尾。若 $v\cos\theta < u$，則巴士迎頭撞向雨，雨改為以速率 $nhb\,(u - v\cos\theta)$ 打中車頭。無論哪種情況，總速率均為

$$nb\Big(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\Big),$$

與 $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$ 成正比，正如所求。



選擇車速

設行程長度為 D，所需時間為 D/u，所以收集到的總雨量與下式成正比：

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\Big), \qquad 0 < u \le w.$$

記 $c = v\cos\theta$，並去掉絕對值符號。

若 $u \le c$：

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

分子為正，所以 R 在 $0 < u \le c$ 上嚴格遞減（strictly decreasing）。

若 $u \ge c$：

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

它是遞增還是遞減，只取決於 $a\sin\theta - h\cos\theta$ 的正負號。

想一想 為甚麼開得越快不一定越好？

開快一點會縮短行程，這對車頂總是有利：車頂所佔的份額是 $Dav\sin\theta/u$。可是一旦 $u > c$，巴士便迎頭撞向雨，而車頭所佔的份額 $Dh(u - c)/u$ 會隨 u 增大。$a\sin\theta - h\cos\theta$ 的正負號告訴我們哪個效應佔上風。

兩條公式在 $u = c$ 時相等，所以 R 是連續（continuous）的。現在：

- 若 $w < v\cos\theta$，則所有容許的車速都滿足 $u \le c$，而 R 在此遞減，所以最佳選擇是 $u = w$。
- 若 $a\sin\theta > h\cos\theta$，則 R 在 $u \le c$ 上遞減，在 $u \ge c$ 上亦遞減。所以 R 在整個 $(0, w]$ 上遞減，最佳選擇同樣是 $u = w$。

這就證明了第一個結論。

若 $w > v\cos\theta$ 且 $a\sin\theta < h\cos\theta$：$R$ 在 $(0, c]$ 上遞減，在 $[c, w]$ 上嚴格遞增。所以最小值出現在

$$u = v\cos\theta,$$

即剛好以雨的水平速率行駛。此時雨相對於巴士鉛直落下，只有車頂會淋濕，總量為 $R(c) = Da\tan\theta$（以我們的單位計）。

若 $a\sin\theta = h\cos\theta$：當 $u \ge c$ 時，$R(u) = Dh$，與 u 無關。若 $w \ge v\cos\theta$，則 $v\cos\theta$ 與 w 之間的任何車速都同樣好，而低於 $v\cos\theta$ 的車速都較差。（若 $w < v\cos\theta$，則適用第一種情況，取 $u = w$。）從物理角度看，超過 $u = c$ 之後，開快一點在車頂省下的雨量，剛好等於車頭多淋的雨量。這個條件即 $\tan\theta = h/a$：從路面看，雨沿着與巴士側面一條對角線平行的方向落下。

回程

現在巴士向南行駛，迎着雨前進。按我們以北為正的約定，其速度為 $-u$，所以雨的相對水平速度為 $v\cos\theta + u > 0$，雨總是打中車頭。總量與下式成正比：

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

它對 u 嚴格遞減。所以回程時，無論 a、h 和 θ 取甚麼值，司機都應盡量開快，即 $u = w$。

驗算

- 取 $a = 1.3$、$h = 0.8$、$v = 2$、$\theta = 0.6$ 及 $u = 0.7$，公式給出速率 2.229（以單位雨點密度及單位闊度計）。用電腦模擬隨機分佈的雨點穿過巴士截面，得出 2.232。在 $u = 0$、$u > v\cos\theta$ 以及 u 為負（回程）的情況下，吻合程度同樣良好。
- 取 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$（雨鉛直落下）。此時 $a\sin\theta > h\cos\theta$，所以應全速行駛。這很合理：只有車頂會淋濕，在雨中的時間越短，淋到的雨就越少。
- 在 $\tan\theta = h/a$ 的相等情況下，總量 Dh 在 $u = v\cos\theta$、$1.5v\cos\theta$ 及 $3v\cos\theta$ 時都相同，與預測一致。

常見錯誤

- 求速率的最小值，而不是總量的最小值：必須把速率乘以行程時間 D/u。
- 忘記當 $u > v\cos\theta$ 時，雨打中的是車頭而不是車尾。這正是需要絕對值的原因。
- 回程時再次使用 $|v\cos\theta - u|$；此時相對速率應為 $v\cos\theta + u$。

STEP 之外

「密度 × 面積 × 法向速度」這種計算，就是向量場（vector field）穿過一個曲面的通量。在向量微積分中，它成為曲面積分（surface integral）$\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$，這是流體力學和電磁學中守恆定律（conservation laws）的出發點。改用巴士的參考系，就是一次伽利略變換（Galilean transformation），它是相對論在經典力學中的先驅。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）同時討論了相對運動和這類通量論證。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。