詳細解答

STEP I 2015，第 1 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP I 2015，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q1

關鍵思路

能因式分解（factorise）的都先因式分解。這個二次式可以分解，所以零點（zeros）一目了然；而導數（derivative）同樣是 e^x 乘以一個可分解的二次式，所以轉向點（turning points）也一目了然。草圖畫對之後，要數「曲線 $= k$」有多少個解，只需把一條水平線上下移動，看它與曲線相交多少次。至於第 (ii) 部分，留意新函數其實就是把舊函數在 x^2 處取值，所以幾乎所有結果都可以沿用。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x-1)(x-2)$。

*零點與正負號。*由於 $e^x > 0$，$f(x) = 0$ 當且僅當 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 2$。此外，f 在 $x < \frac{1}{2}$ 及 $x > 2$ 時為正，在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上為負。曲線與 y 軸相交於 $f(0) = 2$。

*轉向點。*由乘積法則（product rule），

$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x-3)(x+1).$$

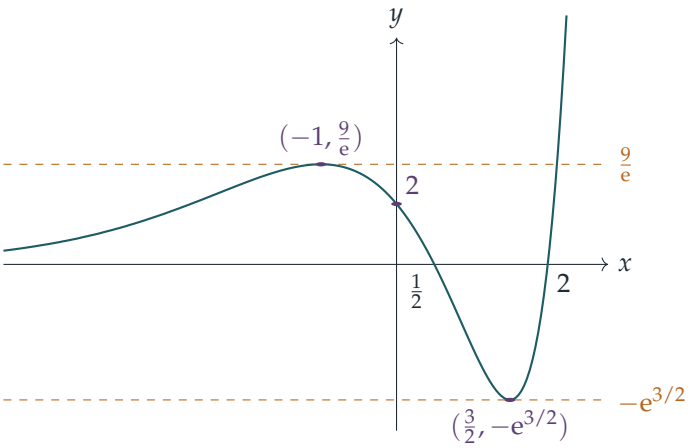
所以 $f'(x) = 0$ 於 $x = -1$ 及 $x = \frac{3}{2}$。f' 的正負號與 $(2x-3)(x+1)$ 相同：$x < -1$ 時為正，在 $(-1, \frac{3}{2})$ 上為負，$x > \frac{3}{2}$ 時為正。因此 f 先遞增，後遞減，再遞增，並且

$$f(-1) = e^{-1}(2 + 5 + 2) = \frac{9}{e} \approx 3.31 \qquad \text{（局部極大值，local maximum），}$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = e^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -e^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{（局部極小值，local minimum）.}$$

*兩端的走勢。*當 $x \to \infty$ 時，兩個因式都增大，所以 $f(x) \to \infty$。當 $x \to -\infty$ 時，由題

目給出的事實（取 $n = 2, 1, 0$）可知 $2x^2e^x$、$-5xe^x$ 及 $2e^x$ 各自趨於 0，所以 $f(x) \to 0$。由於 $f > 0$ 對 $x < \frac{1}{2}$ 成立，曲線從上方趨近負 x 軸：x 軸是一條漸近線（asymptote）。



數算 $f(x) = k$ 的解。解的數目就是水平線 $y = k$ 與曲線相交的次數。逐一考慮曲線的三段單調（monotonic）部分：

- 在 $(-\infty, -1]$ 上，f 嚴格遞增，取遍 $(0, \frac{9}{e}]$ 中每個值恰好一次（它永遠達不到 0）；
- 在 $[-1, \frac{3}{2}]$ 上，f 由 $\frac{9}{e}$ 嚴格遞減至 $-e^{3/2}$，取遍其間每個值恰好一次；
- 在 $[\frac{3}{2}, \infty)$ 上，f 由 $-e^{3/2}$ 嚴格遞增至 ∞，取遍每個值恰好一次。

把各段的貢獻加起來（並小心不要把 $x = -1$ 或 $x = \frac{3}{2}$ 重複計算）：

$k < -e^{3/2}$	無解
$k = -e^{3/2}$	一個解（$x = \frac{3}{2}$）
$-e^{3/2} < k \leq 0$	兩個解
$0 < k < \frac{9}{e}$	三個解
$k = \frac{9}{e}$	兩個解（$x = -1$ 及一個 $x > 2$ 的解）
$k > \frac{9}{e}$	一個解

想一想 為甚麼 $k = 0$ 時有兩個解，而不是三個？

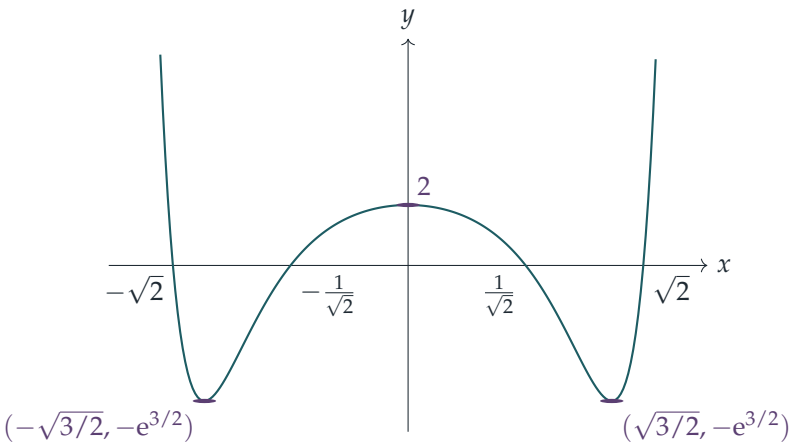
x 軸是左方的漸近線，而且對每個 $x < \frac{1}{2}$ 都有 $f(x) > 0$，所以最左邊的分支永遠不會真正到達 0。$f(x) = 0$ 的解只有 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = 2$。不過，對任何很小的 $k > 0$，左邊的分支確實能到達高度 k，所以解的數目會跳升至三個。

第 (ii) 部分

設 $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$。那麼 $g(x) = f(x^2)$，所以 g 是偶函數（even function），其圖像關於 y 軸對稱。當 x 取遍 $[0, \infty)$ 時，$u = x^2$ 遞增地取遍 $[0, \infty)$，所以對 $x \geq 0$，g 的圖像只是重走 f 的圖像中 $u \geq 0$ 的部分：

- $g(0) = f(0) = 2$；
- 零點在 $x^2 = \frac{1}{2}$ 或 $x^2 = 2$ 處，即 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $x = \pm\sqrt{2}$；
- 由鏈式法則（chain rule），$g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$，它只在 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{3/2}$ 處為零。（f 在 $u = -1$ 處的轉向點消失了，因為 $x^2 = -1$ 沒有實數解。）

當 $0 < x < \sqrt{3/2}$ 時，$g'(x) < 0$；當 $x > \sqrt{3/2}$ 時，$g'(x) > 0$。所以 $(0, 2)$ 是局部極大值點（由對稱性，在 0 的左邊附近 $g' > 0$），而 $x = \pm\sqrt{3/2}$ 是極小值點，極小值為 $f(\frac{3}{2}) = -\mathrm{e}^{3/2}$。最後，當 $x \to \pm\infty$ 時 $g(x) \to \infty$，而且由於因子 e^{x^2}，增長得非常快。曲線呈「W」形：



驗算

- $f(-1) = 9/\mathrm{e} \approx 3.311$ 及 $f(1.5) = -\mathrm{e}^{1.5} \approx -4.482$；在附近幾點計算 f 的值，可確認它們分別是極大值和極小值。
- 在 $x = 0$ 附近，$g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$，是一條開口向下的拋物線（parabola），確認了 $(0, 2)$ 是局部極大值點。
- 已用電腦對每個範圍內的樣本 k 值核實根的數目（例如 $k = 2$ 有三個根，$k = -1$ 有兩個根）。

- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$：正數，而且極小，與漸近線的預測一致。

常見錯誤

- 忘記曲線在左方只是趨近 x 軸，因而在 $k = 0$ 時數出三個解。
- 漏掉邊界情況 $k = \frac{9}{\mathrm{e}}$ 及 $k = -\mathrm{e}^{3/2}$；在這些情況下，水平線與曲線相切（tangent），兩個解合而為一。
- 在第 (ii) 部分，保留了對應 $x^2 = -1$ 的轉向點。

STEP 之外

上面的數解論證建基於介值定理（intermediate value theorem）加上嚴格單調性（strict monotonicity）：在區間上連續且嚴格遞增的函數，會取遍兩端值之間的每個值恰好一次。大學的數學分析課程會嚴謹地證明這些事實，以及題目容許你假設的極限 $x^n\mathrm{e}^x \to 0$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本非常易讀的書，可以看看這些證明是怎樣做的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。