詳細解答

STEP III 2014，第 9 題

力學 • 有阻力的拋體

> **STEP III 2014，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q9

關鍵思路

題目已給出位置，所以速度（velocity）只需求導一次便得到；要驗證運動方程（equation of motion），只需把 $\mathbf{v}$ 和 $\dot{\mathbf{v}}$ 代入 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$。之後的一切都圍繞分量（components）展開：$\mathbf{r}$ 的 $\mathbf{j}$ 分量決定 T，而 $\mathbf{v}$ 在時間 T 時兩個分量之比給出 $\tan\beta$。最後的不等式乍看很繁複，但只要令 $x = kT$ 並消去分母，它便正好化簡為提示中的 $\sinh x > x$。

解答

速度，以及驗證運動

我們把物體視為質點（particle）。牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）給出 $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$，所以運動方程是

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

而初始條件（initial conditions）是在 $t = 0$ 時 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$。

這裏 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{u}$ 都是常向量，所以我們把給定的 $\mathbf{r}$ 逐個係數求導：

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

再求導一次得 $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$。另一方面，

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - (1 - \mathrm{e}^{-kt})\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

兩者相同，所以運動方程成立。在 $t = 0$ 時 $\mathrm{e}^0 = 1$，所以 $\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$。兩個初始條件都成立。

飛行時間

現在取 $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$。$\mathbf{r}$ 的 $\mathbf{j}$ 分量是

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

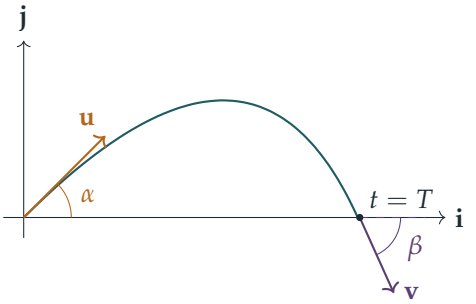
令它在 $t = T$ 時等於零，並乘以 k^2：

$$uk\sin\alpha\,(1-\mathrm{e}^{-kT}) = (kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT})g.$$

由於 $T > 0$ 及 $k > 0$，我們有 $1 - \mathrm{e}^{-kT} > 0$，所以可以除以它。把 $kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - (1 - \mathrm{e}^{-kT})$ 代入，得

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

即所求。



時間 T 時的角度

在 $t = T$ 時，$\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$ 的分量是

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

由於 $0 < \alpha < 90°$，所以 $v_x > 0$。我們預期 $v_y < 0$，因為質點正在下降，這一點稍後會證明。因此 $\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{i}$ 之間的銳角（acute angle）滿足 $\tan\beta = -v_y/v_x$。全式除以 v_x：

$$\tan\beta = \frac{(1-\mathrm{e}^{-kT})g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

這裏用了 $(1-\mathrm{e}^{-kT})/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$。

證明 $\tan\beta > \tan\alpha$

由上一個結果，$\tan\beta > \tan\alpha$ 等價於

$$\frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff (\mathrm{e}^{kT}-1)g > 2uk\sin\alpha,$$

這是乘以 $uk\cos\alpha > 0$ 所得。現在用飛行時間的結果代替 $uk\sin\alpha$，這樣 u 和 α 便完全消去。

想一想 怎樣把它變成與 $\sinh kT$ 有關的式子？

令 $x = kT > 0$。那麼 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$，除以 $g > 0$ 之後，所需的不等式變為

$$\mathrm{e}^x - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - 2.$$

乘以 $\mathrm{e}^x - 1 > 0$（因此不等號方向不變）並展開：

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 > 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^x \\
&\iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\text{除以} \mathrm{e}^x > 0) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

每一步都可逆，而且當 $kT > 0$ 時 $\sinh kT > kT$（題目容許我們假設這一點）。所以 $\tan\beta > \tan\alpha$。

這也確定了 v_y 的正負：我們已證明 $-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$ 且 $v_x > 0$，所以 $v_y < 0$。質點在時間 T 時確實正在下降，$\tan\beta$ 的公式因而成立。

最後，α 和 β 都在 $(0°, 90°)$ 之內，而 tan 在此區間上嚴格遞增（strictly increasing）。所以由 $\tan\beta > \tan\alpha$ 得 $\beta > \alpha$。有阻力（resistance）時，質點落下的路徑比上升時更陡。

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，利用 $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$，得 $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$，這正是一般的拋射體（projectile）運動。此外，當 x 很小時 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$，所以飛行時間的結果給出 $T \to 2u\sin\alpha/g$。同理 $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$，即對稱的拋物線。
- 取 $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$、$u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ 及 $\alpha = 45°$。以數值方法解 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$ 得 $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$，比沒有阻力時的 $1.414\,\mathrm{s}$ 短。落地角為 $\beta \approx 65.7° > 45°$，兩條公式都吻合至小數點後很多位。用電腦對 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ 作逐步數值積分(numerical integration)，也能重現給定的 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$。

常見錯誤

- 取 $\tan\beta = v_y/v_x$ 而漏掉負號：落地時 v_y 是負數，而 β 是銳角。
- 除以或乘以 $1 - \mathrm{e}^{-kT}$ 或 $\mathrm{e}^{kT} - 1$ 時沒有說明它是正數。正是這一點保證不等號方向正確。

► 停在 $\tan\beta > \tan\alpha$：要推出 $\beta > \alpha$，需要用到 tan 在銳角範圍內遞增這個事實。

STEP 之外

給定的 $\mathbf{r}$ 是線性微分方程（linear differential equation）$\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ 的解，你可以用積分因子（integrating factor）e^{kt} 直接解出它。線性阻力（linear drag）是唯一一種能使 $\mathbf{i}$ 方向與 $\mathbf{j}$ 方向的運動分離的阻力定律。若採用更貼近現實的二次阻力（quadratic drag）$-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$，兩個方向的運動便會耦合（coupled），而且不存在閉式解（closed form）。至於軌跡不對稱、下降時較陡這一特點，在兩種情況下都成立。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種思路討論受阻力作用的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。