詳細解答

STEP III 2014，第 8 題

純數學 • 級數的收斂

> **STEP III 2014，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 2.3 節一個發散級數與它的收斂近親中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/kempner.html

關鍵思路

把正整數切成一段段的區間 $[k^n, k^{n+1})$。每段中的每一項都介乎該段起點的值與下一段起點的值之間，所以每段之和都被夾在「項數乘以這兩個值」之間。把各段加起來，一個難以處理的級數（series）便變成幾何級數（geometric series），或者變成每段都貢獻一個常數的級數，於是我們一眼就能看出它是否發散（diverges）。同樣的計數方法也適用於不含數字 2 的整數，只要我們數清楚每段裏有多少個這樣的整數便可。

解答

分段不等式

區間 $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$ 共包含

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

個整數。由於 f 是嚴格遞減（strictly decreasing）的，對該段中的每個 r，

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

第一個不等式成立是因為 $r < k^{n+1}$，第二個成立是因為 $r \geq k^n$（等號只在 $r = k^n$ 時成立）。把這些不等式對 r 的 $k^n(k-1)$ 個值相加，得

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

即為所求。（事實上左邊的不等式是嚴格的。）



$k = 2$ 時的各段，並標示每段的項數。

第 (i) 部分

取 $k = 2$ 及 $\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$，這是嚴格遞減的。分段不等式變成

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{即} \qquad \frac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

$n = 0, 1, \ldots, N$ 的各段恰好拼合起來覆蓋 $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$，因為每段都在下一段開始之前剛好結束。把這 $N+1$ 個不等式相加，

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

至於推論：部分和（partial sums）$H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$ 隨 m 遞增，而 $H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$，只要取 N 足夠大，它便可以大於任何我們指定的數。因此部分和無上界，$\sum \frac{1}{r}$ 不收斂（converge）。

第 (ii) 部分

取 $k = 2$ 及 $\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$，同樣是嚴格遞減的。這次我們只需要右邊的不等式：

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

如前對 $n = 0, 1, \ldots, N$ 相加，

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

想一想 這只為部分的部分和給出了上界。為甚麼它能為整個無窮級數給出上界？

所有項都是正數，所以部分和遞增。任何部分和 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$ 都不大於滿足 $2^{N+1}-1 \geq m$ 的那個部分和，因此小於 $\frac{4}{3}$。一個有上界（bounded above）的遞增數列必定收斂，而且其極限不大於該上界。因此

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

第 (iii) 部分

計算 $S(1000)$ 的元素個數。把 0 至 999 的每個整數寫成三位數字串，不足的在前面補零（例如 7 寫成 007）。補上的零不會引入 2，所以一個整數不含 2，當且僅當其數字串不含 2。三個位置中每一位都可以是 $0, 1, 3, 4, \ldots, 9$ 這九個數字之一，共得 9^3 個數字串，各自對應不同的整數。其中一個是 000，它不是正數，所以 $S(1000)$ 含有 $9^3 - 1$ 個數。

分段計數。以 $n+1$ 個位置作同樣的論證，可知 $S(10^{n+1})$ 中有 $9^{n+1}-1$ 個整數。所以由 $(n+1)$ 位數組成的區間 $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$ 含有

$$(9^{n+1}-1) - (9^n - 1) = 8 \cdot 9^n$$

個不含 2 的整數。（等價地說，首位數字不能是 0 或 2，所以有 8 個選擇，其餘 n 位各有 9 個選擇。）

估計 $\sigma(n)$ 的上界。這就是 $k = 10$ 的分段論證，只不過我們只計算不含 2 的整數。該段中每個 r 都滿足 $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$，所以這一段對總和的貢獻最多是

$$8 \cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

現在固定 n，並選取 M 使得 $n \leq 10^{M+1}$。$S(n)$ 的每個元素都落在 $m = 0, 1, \ldots, M$ 的某一段之中，而且所有倒數都是正數。所以

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

第二個不等式是嚴格的，因為我們略去了 $m > M$ 的正項。因此對所有 n，$\sigma(n) < 80$。

驗算

- 第 (ii) 部分：$\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$（阿培里常數（Apéry's constant)），遠低於 $1\frac{1}{3}$。
- 第 (i) 部分取 $N = 2$：$\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$，介乎 1.5 與 3 之間。

- 第 (iii) 部分：直接點算可證實 1000 以下有 $728 = 9^3 - 1$ 個數，而每段有 $8 \cdot 9^n$ 個。用電腦直接求和得 $\sigma(10^7) \approx 10.28$，遠低於 80。這個上界相當寬鬆，但題目要求的也就只是這麼多。

常見錯誤

- 數錯一段的項數。該段由 k^n 至 $k^{n+1} - 1$，共 $k^{n+1} - k^n$ 項，而不是 $k^{n+1} - k^n - 1$ 項。
- 在 (iii) 中把第 n 段的全部 9^n 個不含 2 的數字串都算進去。首位數字不能是 0，所以只有 $8 \cdot 9^n$ 個。若用 9^{n+1}，所得上界是 90，並不足夠。
- 在 (ii) 中只得出至 $2^{N+1} - 1$ 為止的部分和的上界便停下，沒有說明為甚麼整個無窮級數也有上界。

STEP 之外

這就是柯西（Cauchy）凝聚判別法（Cauchy's condensation test）：對於遞減的正數數列，$\sum a_r$ 收斂當且僅當 $\sum 2^n a_{2^n}$ 收斂。由此可立即看出 $\sum r^{-p}$ 收斂當且僅當 $p > 1$。第 (iii) 部分是 Kempner 級數（Kempner series）：把所有含某個指定數字的整數刪去，原本發散的調和級數（harmonic series）便變成收斂，因為幾乎所有很大的整數都包含每一個數字。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對凝聚判別法及各種比較判別法（comparison tests）有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。