詳細解答

STEP III 2014，第 7 題

純數學 • 向量與圓內接四邊形

STEP III 2014，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

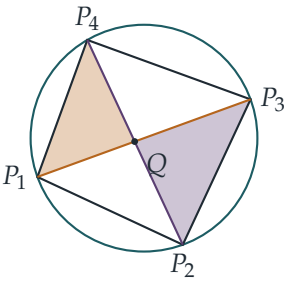
step.maths.org/questions/14-s3-q7

關鍵思路

第 (i) 部分是相交弦定理（intersecting chords theorem），源自同弓形內的圓周角相等（angles in the same segment）。向量部分則從另一途徑再次得出同一事實。平面上的四點是「仿射相關」（affinely dependent）的，而該相關關係中的係數確定了兩條對角線（diagonal）的交點位置，因此它們以已知比例分割每條對角線。把這些比例代入 (i)，便得出最終的關係式。

解答

整個解答都會用到這個構形的兩個事實。第一，P_i 之中任何三點都不共線（collinear），因為一條直線與一個圓最多只相交於兩點。第二，由於各頂點是沿圓周依次標記的，P_1 和 P_3 分別位於弦（chord）P_2P_4 所分出的兩段不同的弧（arc）上。所以它們位於直線 P_2P_4 的兩側，而兩條對角線相交於一點 Q，且 Q 嚴格位於線段 P_1P_3 和 P_2P_4 的內部。



第 (i) 部分

在三角形 P_1QP_4 和 P_2QP_3 中：

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$，因為它們是在 Q 處的對頂角（vertically opposite angles）；
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$ 及 $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$。這兩角相等，因為它們都是弦 P_3P_4 在同一段弧上的點 P_1、P_2 所對的角（該弧由 P_4 經 P_1 和 P_2 到 P_3）。

所以這兩個三角形相似（similar），對應關係為 $P_1 \leftrightarrow P_2$、$Q \leftrightarrow Q$、$P_4 \leftrightarrow P_3$。對應邊成比例：

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{所以} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）位於一個平面上，所以三個向量 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ 都位於一個二維空間中。二維空間中的三個向量必定線性相關（linearly dependent），所以存在不全為零的數 b_2, b_3, b_4，使得

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

（具體來說：由於 P_1, P_2, P_3 不共線，$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 與 $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ 不平行，因此它們張成（span）整個平面，而 $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ 是它們的線性組合。於是可取 $b_4 = -1$。）現設 $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$，並對 $i = 2, 3, 4$ 設 $a_i = b_i$。那麼 $\sum a_i = 0$，各 a_i 不全為零，而且

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

所以 $(*)$ 成立。

第 (iii) 部分

$a_1 + a_3 \neq 0$。假設相反，即 $a_1 + a_3 = 0$。那麼由 $(*)$ 的第一條方程，亦有 $a_2 + a_4 = 0$，所以 $a_3 = -a_1$ 及 $a_4 = -a_2$。第二條方程變成

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

直線 P_1P_3 與 P_2P_4 是不同的直線（否則四點全部共線），而且它們相交於 Q，所以兩者不平行。因此 $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 與 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ 均非零且不平行，這迫使 $a_1 = a_2 = 0$。於是四個 a_i 全為零，產生矛盾。所以 $a_1 + a_3 \neq 0$，同理 $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$。

交點。由 $(*)$ 得 $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$ 及 $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$。兩式相除，

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

第一個形式顯示 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1+a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$，是直線 P_1P_3 上的一點。同樣地，第二個形式顯示它是直線 P_2P_4 上的一點。兩條不平行的直線只相交於一點，所以 $\mathbf{r}$ 就是 Q 的位置向量（position vector）。

想一想 怎樣把這條 Q 的公式轉化為長度 P_1Q 和 QP_3？

相減即可。利用 $\mathbf{q} = \mathbf{r}$，

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1+a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1+a_3}.$$

取長度得 $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1+a_3|}P_1P_3$ 及 $QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1+a_3|}P_1P_3$。同樣地，由 $\mathbf{r}$ 的第二個形式得 $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2+a_4|}P_2P_4$ 及 $QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2+a_4|}P_2P_4$。

正負號。由於 Q 嚴格位於 P_1 與 P_3 之間，分數 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$ 嚴格介乎 0 與 1 之間。於是 $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$ 亦嚴格介乎 0 與 1 之間。兩個正數的積為正，所以

$$\frac{a_1a_3}{(a_1+a_3)^2} > 0, \qquad \text{即} a_1a_3 > 0.$$

對 P_2P_4 作同樣的論證，得 $a_2a_4 > 0$。所以 $|a_1a_3| = a_1a_3$ 及 $|a_2a_4| = a_2a_4$。

推導結論。代入第 (i) 部分：

$$\frac{a_1a_3}{(a_1+a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2+a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

由於 $(a_2+a_4)^2 = (a_1+a_3)^2 \neq 0$，兩邊乘以它，得

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

此即所求結果。

驗算

- 取頂點為 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 的正方形。那麼 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4$，所以 $a = (1,-1,1,-1)$ 滿足 $(*)$。公式給出 Q 位於原點，且 $a_1a_3(P_1P_3)^2 = 4 = a_2a_4(P_2P_4)^2$。
- 對於不對稱的情況，如圖所示，取單位圓（unit circle）上角度為 $200°, 290°, 20°, 120°$ 的點 $P_1, \ldots, P_4$。(iii) 的全部三項結論，包括 $a_1a_3 > 0$ 和 $a_2a_4 > 0$，都已用電腦在這個例子及數以千計的隨機圓內接四邊形上驗證，誤差在 10^{-10} 以內。
- 把所有 a_i 乘以同一因子 λ 後，答案依然成立，這是理所當然的：最終關係式兩邊都乘以 λ^2。

常見錯誤

- 在 (i) 中配錯了角：在 P_1 和 P_2 處的兩個相等的角都是弦 P_3P_4 所對的角，這決定了哪些邊互相對應。
- 在 (iii) 中未加說明便去掉絕對值（absolute value）符號。帶絕對值的關係式很容易得出；真正的功夫在於證明 $a_1a_3 > 0$ 和 $a_2a_4 > 0$，這要用到 Q 位於兩條對角線內部這一事實。
- 證明 $a_1 + a_3 \neq 0$ 時，忘記說明兩條對角線為何不平行。

STEP 之外

量 $(P_1Q)(QP_3)$ 稱為點 Q 關於該圓的冪（power）；對於通過 Q 的每一條弦，它的值都相同。第 (ii) 部分說的是平面上的四點是仿射相關的。數 a_i 是一種類似重心坐標（barycentric coordinates）的東西，而 Q 的公式讓我們初步看到仿射幾何（affine geometry）如何在不用任何坐標的情況下處理點、直線和比例。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）講解了線性相關，以及 (ii) 背後的維數計算。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。