詳細解答

STEP III 2014，第 6 題

純數學 • 以凸性證明不等式

> **STEP III 2014，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q6

關鍵思路

一個函數若在零點處取值為零、斜率（slope）也為零，而且圖像向上彎曲，那麼它必然升到零以上。把題目給出的事實積分兩次，就能把這幅圖像變成嚴謹的證明。之後題中每條不等式，都只需把所有項移到同一邊，得出一個滿足 $f(0) = f'(0) = 0$ 的函數 f，再驗證 f'' 為正即可。真正要花心思的是選擇恰當的整理方式，使 f'' 的形式簡單。

解答

開首的結果

設對 $0 < t < x_0$ 有 $f''(t) > 0$，且 $f(0) = f'(0) = 0$。取定 x，使 $0 < x < x_0$。

取 $h = f''$。由於對 $0 < t < x$ 有 $f''(t) > 0$，由題目給出的結果得

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

這對 $(0, x_0)$ 內每一個 x 都成立，所以對 $0 < t < x_0$ 有 $f'(t) > 0$。

現在再次應用題目給出的結果，這次取 $h = f'$。對 $0 < x < x_0$，我們有：對 $0 < t < x$，$f'(t) > 0$，所以

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

因此對 $0 < t < x_0$ 有 $f(t) > 0$，得證。下文會一直以 $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ 應用這個結果。

第 (i) 部分

設 $f(x) = 1 - \cos x \cosh x$。則 $f(0) = 1 - 1 = 0$，而由乘積法則（product rule）得

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

再求導一次，

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，$\sin x > 0$ 及 $\sinh x > 0$，所以 $f''(x) > 0$。由開首的結果，$f(x) > 0$，即

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{對} 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

第 (ii) 部分

> **想一想** 應該把開首的結果應用到哪個函數上？直接用 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 看來會很繁複。

先消去分數。當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，x、$\sin x$、$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 全部為正，所以兩邊乘以正數不會改變不等號的方向。於是

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

（第一條兩邊乘以 $x \cosh x > 0$，第二條兩邊乘以 $x \sinh x > 0$。）乘積 $\sin x \cosh x$ 和 $\sin x \sinh x$ 求導後形式整齊，這正是選用這個形式的原因。

*左邊的不等式。*設 $g(x) = \sin x \cosh x - x$。則 $g(0) = 0$，且

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

再求導一次，$\sin x \cosh x$ 項互相抵消：

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時它為正，因為在該區間內 $\cos x > 0$ 及 $\sinh x > 0$。（上限 $\frac{1}{2}\pi$ 正是在這裏起作用。）由開首的結果，$g(x) > 0$，所以 $x < \sin x \cosh x$，從而 $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$。

*右邊的不等式。*設 $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$。則 $k(0) = 0$，且

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

再求導一次，$\sin x \sinh x$ 項互相抵消：

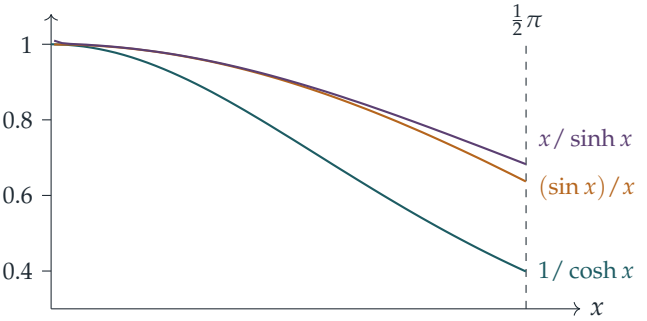
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時 $\cos x \cosh x < 1$，所以在該區間內 $k''(x) > 0$。由開首的結果，$k(x) > 0$，所以 $\sin x \sinh x < x^2$，從而 $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$。

兩者合起來，對 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$，

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

得證。



驗算

- 級數（series）：$\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$，所以當 x 很小時它確實略低於 1，與 (i) 一致。同樣，$\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$、$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$ 及 $\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$，所以 x 很小時左邊的不等式顯然成立，而右邊的不等式則由下一項決定（$\frac{\sin x}{x}$ 的 x^4 係數是 $\frac{1}{120}$，而 $\frac{x}{\sinh x}$ 的則是較大的 $\frac{7}{360}$）。
- 在 $x = 1$：$\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$，且 $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$。
- 在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 附近，取 $x = 1.57$：三個值約為 0.399、0.637 和 0.683，而 $\cos x \cosh x \approx 0.002$。

常見錯誤

- 直接把開首的結果應用到 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 本身：它在 0 處根本沒有定義，而且其導數（derivative）十分難處理。應先消去分母，並檢查每個乘上的因子都是正數。

- 只檢查 $f(0) = 0$ 而忘記檢查 $f'(0) = 0$；缺少後者，開首的結果便不適用。
- 沒有察覺第二條不等式需要用到第 (i) 部分：$k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$ 為正，正是因為 (i)。

STEP 之外

開首的結果其實是均值定理（mean value theorem）論證的一種形式：導數為正的函數是遞增（increasing）的，這裏用了兩次。它說明凸函數（convex function）位於其切線（tangent line）之上，這裏的切線就是原點處的 $y = 0$；而這種「比較二階導數」的技巧，是證明初等函數之間不等式的標準方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對均值定理及其推論有細緻的發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。