詳細解答

STEP III 2014，第 5 題

純數學 • 幾何中的複數

> **STEP III 2014，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q5

關鍵思路

在複平面（complex plane）上，「平行且長度相等」其實就是「作為位移向量（displacement vector）相等」，而逆時針（anticlockwise）旋轉四分之一圈就是乘以 i。因此，本題的每一個幾何條件都可以化為關於頂點的一條簡短線性方程。至於建在各邊上的正方形，我們先走到該邊的中點（midpoint），再沿垂直於該邊的方向向外走半條邊長，就得到正方形的中心。

解答

平行四邊形的判別條件

首先設 $a+c=b+d$。那麼

$$b-a=c-d \qquad 及 \qquad d-a=c-b,$$

所以位移 $\overrightarrow{AB}$ 等於 $\overrightarrow{DC}$，而 $\overrightarrow{AD}$ 等於 $\overrightarrow{BC}$。相等的位移互相平行且長度相等，故兩組對邊均平行且相等：$ABCD$ 是平行四邊形（parallelogram）。

反之，設 $ABCD$ 是平行四邊形。兩條平行且等長的線段，其位移必定相等或相反，所以

$$b-a=\varepsilon(c-d), \qquad d-a=\eta(c-b), \qquad \varepsilon,\eta\in\{1,-1\}.$$

若 $\varepsilon=1$ 或 $\eta=1$，相應的方程移項後即得 $a+c=b+d$。餘下唯一的情況是 $\varepsilon=\eta=-1$，即 $b-a=d-c$ 及 $d-a=b-c$。以第一式減去第二式，得 $b-d=d-b$，故 $b=d$，這與頂點互不相同矛盾。因此 $a+c=b+d$，等價關係得證。

正方形的判別條件

設 $ABCD$ 是平行四邊形，並設 $m = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$ 為兩條對角線（diagonal）的公共中點（即其中心）。那麼

$$a-m = \tfrac{1}{2}(a-c), \qquad b-m = \tfrac{1}{2}(b-d), \qquad c-m = -(a-m), \qquad d-m = -(b-m).$$

若 $ABCD$ 是正方形（square），則其對角線長度相等，並互相垂直平分，所以 B 是由 A 繞 m 旋轉四分之一圈得到的。由於頂點按逆時針方向標記，這個旋轉是逆時針的。所以 $b-m = \mathrm{i}(a-m)$，即 $\frac{1}{2}(b-d) = \frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$，也就是 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$。

反之，若 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$，記 $w = a-m \neq 0$。那麼

$$a-m = w, \quad b-m = \mathrm{i}w, \quad c-m = -w, \quad d-m = -\mathrm{i}w,$$

所以四個頂點就是 w 繞 m 依次旋轉 $90°$ 所得。它們是一個正方形的頂點（四條邊長均為 $|w|\sqrt{2}$，而且每條邊都是前一條邊乘以 i）。第二個等價關係得證。

第 (i) 部分

頂點 P, Q, R, S 按逆時針排列，所以當我們由 P 走向 Q 時，$PQRS$ 的內部在我們的左方。因此建在 PQ 外側的正方形位於我們的右方。

從 PQ 的中點 $\frac{1}{2}(p+q)$ 出發，沿垂直於 PQ 的方向向右移動 $\frac{1}{2}|q-p|$（半條邊長），便到達中心 X。把 $q-p$ 乘以 $-\mathrm{i}$ 會使它順時針旋轉 $90°$，即轉向右方，所以這一步是 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$。因此

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p) = \tfrac{1}{2}(p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i})),$$

即為所求。

> **想一想** 為甚麼是 $-\mathrm{i}$ 而不是 $+\mathrm{i}$？

乘以 $+\mathrm{i}$ 會把 $\overrightarrow{PQ}$ 轉向左方，指向四邊形內部，得到的是建在內側的正方形的中心。由於每個內角都小於 $180°$，內部完全位於每條邊的左方，所以右方確實是外側。

第 (ii) 部分

對每條邊依次應用第 (i) 部分（同樣的推理對每條邊都適用，因為每條邊都是在內部位於左方的情況下走過的），

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

我們比較兩個判別條件中的表達式。

對頂點之和。

$$\begin{aligned}2(x+z)-2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i})+(q+s)(1-\mathrm{i})-(q+s)(1+\mathrm{i})-(p+r)(1-\mathrm{i})\\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s),\end{aligned}$$

所以

$$x+z-(y+t)=\mathrm{i}(p+r-(q+s)). \tag{1}$$

對角線。

$$2\mathrm{i}(x-z)=\mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i})=(p-r)(\mathrm{i}-1)+(q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t)=(q-s)(1+\mathrm{i})+(r-p)(1-\mathrm{i})=(q-s)(1+\mathrm{i})+(p-r)(\mathrm{i}-1).$$

兩者完全相同，所以

$$\mathrm{i}(x-z)=y-t \tag{2}$$

對每一個這樣的四邊形 $PQRS$ 都成立：線段 XZ 與 YT 總是長度相等且互相垂直。

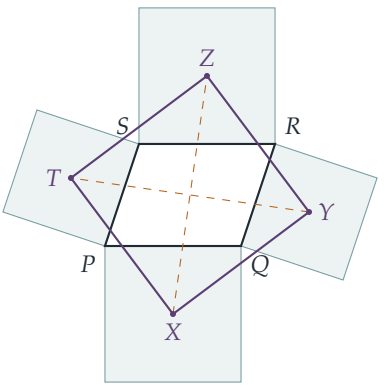
想一想 既然 (2) 總是成立，那麼決定 $XYZT$ 是否正方形的是甚麼？

只有平行四邊形條件。現在我們把各部分結合起來。

若 $PQRS$ 是平行四邊形，則 $p+r=q+s$，所以由 (1) 得 $x+z=y+t$，根據第一個結果，$XYZT$ 是平行四邊形。再結合 (2)，由正方形的判別條件可知 $XYZT$ 是正方形。（該判別條件中「反之」的一半不需要任何關於標記方向的假設；而且 $X\neq Z$，因為若 $x=z$，則 $r-p=\mathrm{i}(s-q)$，即 $\overrightarrow{PR}$ 是 $\overrightarrow{QS}$ 逆時針旋轉四分之一圈所得；但在按逆時針標記的凸四邊形（convex quadrilateral）中，$\overrightarrow{PR}$ 總是由 $\overrightarrow{QS}$ 順時針旋轉一個介乎 0° 與 180° 之間的角，再經縮放而得。）

若 $XYZT$ 是正方形，則它特別地是平行四邊形，所以根據第一個結果，$x+z=y+t$。由 (1) 得 $\mathrm{i}(p+r-q-s)=0$，所以 $p+r=q+s$，$PQRS$ 是平行四邊形。

因此，$XYZT$ 是正方形當且僅當 $PQRS$ 是平行四邊形。



驗算

取平行四邊形 $p = 0$、$q = 4$、$r = 5 + 3\mathrm{i}$、$s = 1 + 3\mathrm{i}$（如上圖）。公式給出 $x = 2 - 2\mathrm{i}$、$y = 6 + \mathrm{i}$、$z = 3 + 5\mathrm{i}$、$t = -1 + 2\mathrm{i}$。$XYZT$ 的各邊為 $4 + 3\mathrm{i}$、$-3 + 4\mathrm{i}$、$-4 - 3\mathrm{i}$、$3 - 4\mathrm{i}$，每條都是前一條的 i 倍：這是邊長為 5 的正方形。作為對第 (i) 部分的驗算，$x = 2 - 2\mathrm{i}$ 確實是 PQ 下方、頂點為 0、4、$4 - 4\mathrm{i}$、$-4\mathrm{i}$ 的正方形的中心。以電腦對數以千計的隨機凸四邊形進行檢驗，每次都證實恆等式（identity）(2) 成立，而且 $XYZT$ 是正方形恰好當 $PQRS$ 是平行四邊形。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分使用 $+\mathrm{i}$，結果把正方形放在四邊形內側。
- 在平行四邊形的判別條件中，忘記「平行且相等」也容許 $b - a = -(c - d)$，而這種情況必須排除。
- 對「當且僅當」只證明了一個方向。在第 (ii) 部分，「正方形 $\Rightarrow$ 平行四邊形」這個方向只需用到 (1)。

STEP 之外

恆等式 (2) 就是范奧貝爾定理（van Aubel's theorem）：對任何四邊形，連接相對兩個外接正方形中心的線段長度相等且互相垂直。這是一個普遍原理的小例子：由旋轉和中點構成的幾何作圖，都是作用於頂點上的線性映射（linear map），因此有關它們的定理都可化為代數恆等式（關於等邊三角形的拿破崙定理（Napoleon's theorem）是另一個例子）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）以優美的方式發展了這種看待複數乘法的幾何觀點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。