詳細解答

STEP III 2014，第 4 題

純數學 • 積分不等式

> **STEP III 2014，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 4.7 節變分法中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/variations.html

關鍵思路

把 I_1 中的平方展開，再與 I 比較：兩者之差是一個恰當導數（exact derivative）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right)$ 的積分，而由於 $y(1) = 0$ 及 $\tan 0 = 0$，這個積分等於零。一旦把 I 寫成某個平方的積分，它非負就顯而易見了。在第 (ii) 部分，只要選取 b 使 $\sec^2$ 項恰好產生 a^2y^2，同一技巧依然奏效；唯一可能出問題的地方，是 $\tan bx$ 在 $[0,1]$ 內趨於無窮。

解答

如題目所意，我們全程假設 y 在 $[0,1]$ 上有連續導數（continuous derivative）。

第 (i) 部分

由於 $0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2}$，函數 $\tan x$ 在 $[0,1]$ 上連續，所以 I_1 有意義。展開平方，

$$I_1 = \int_0^1 \left((y')^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\begin{aligned} I - I_1 &= -\int_0^1 \left(y^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(2yy'\tan x + y^2\sec^2 x\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

這裏用了 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$。由乘積法則（product rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right) = 2yy'\tan x + y^2\sec^2 x$，正好就是被積函數。故此

$$I - I_1 = -\Big[y^2\tan x\Big]_0^1 = -\left(y(1)^2\tan 1 - y(0)^2\tan 0\right) = 0,$$

因為 $y(1)=0$ 且 $\tan 0 = 0$。所以 $I = I_1$，得證。

由於 I_1 是一個平方在長度為正的區間上的積分，$I_1 \geq 0$，因此 $I \geq 0$。

現在假設 $I = 0$。那麼 $I_1 = 0$，而被積函數 $(y' + y\tan x)^2$ 連續且非負，所以它必須在 $[0,1]$ 上處處為零（若它在某一點為正，便會在一個小區間上為正，令積分為正）。因此對 $0 \leq x \leq 1$ 有 $y' + y\tan x = 0$。

想一想 怎樣在不除以 y 的情況下解 $y' + y\tan x = 0$？畢竟 y 可能在某處為零。

使用積分因子（integrating factor）。由於在 $[0,1]$ 上 $\cos x > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = \frac{y' + y\tan x}{\cos x} = 0,$$

所以對某常數 C 有 $y = C\cos x$。條件 $y(1)=0$ 給出 $C\cos 1 = 0$，而 $\cos 1 \neq 0$，所以 $C = 0$。故此，僅當對 $[0,1]$ 中所有 x 都有 $y = 0$ 時，才有 $I = 0$。

第 (ii) 部分

設 $K = \displaystyle\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$，其中 $b > 0$ 有待選取。展開，

$$K = \int_0^1 \left((y')^2 + 2ayy'\tan bx + a^2y^2\tan^2 bx\right)\mathrm{d}x.$$

我們希望出現的導數是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan bx\right) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx = 2ayy'\tan bx + aby^2 + aby^2\tan^2 bx.$$

把它與 K 的被積函數比較，$\tan^2$ 項恰好吻合當且僅當 $ab = a^2$，即 $b = a$。作此選擇後，

$$(y' + ay\tan ax)^2 = (y')^2 - a^2y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

於是

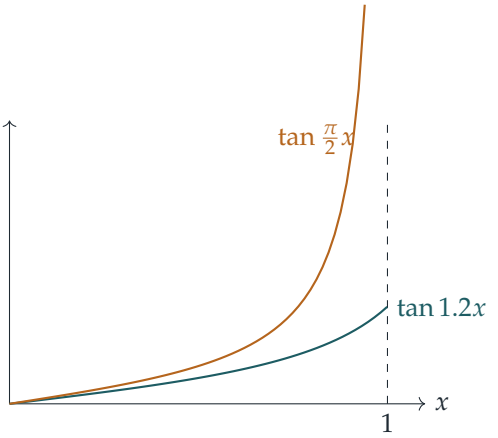
$$K = J + \Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = J + a\,y(1)^2\tan a = J,$$

因為 $y(1)=0$ 且 $\tan 0 = 0$。

這個論證需要 $\tan ax$ 在整個 $[0,1]$ 上有定義且連續，這樣 K 才存在，微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）才適用。由於 $a > 0$，ax 取遍 $[0,a]$，而 tan 在其上連續當且僅當 $a < \frac{\pi}{2}$。所以證明在以下情況成立：

$$a < k = \frac{\pi}{2}.$$

對這樣的 a，我們有 $J = K \geq 0$，因為 K 是一個平方的積分。（事實上，把第 (i) 部分論證中的 $\cos x$ 換成 $\cos ax$，可知 $J = 0$ 會迫使 $y = C\cos ax$ 且 $C\cos a = 0$，所以 $y \equiv 0$；對於不恆為零的 y，我們甚至得到 $J > 0$。）



上圖說明為何 $k = \frac{\pi}{2}$：當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，權函數 $\tan ax$ 在 $[0,1]$ 上保持有界；但當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，它在端點 $x = 1$ 處有一條漸近線（asymptote）。

$a = \frac{\pi}{2}$ 的情況

證明本身提示了該往哪裏找：$K = 0$ 需要 $y' + ay\tan ax = 0$，其解為 $y = C\cos ax$。當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，這些解不滿足條件 $y(1) = 0$；但當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，它們滿足。所以試取

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

它並非處處為零，且 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$。於是

$$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos \pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0.$$

所以當 $a = k$ 時，$y = \cos\frac{\pi x}{2}$（或它的任何非零倍數）給出 $J = 0$。

驗算

- 在第 (i) 部分取 $y = 1 - x$：$I = \int_0^1 (1-(1-x)^2)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$，而以數值方法計算 I_1 也得到 0.6667。
- 對許多隨機選取的 $(1-x)$ 的三次多項式倍數，以及 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中隨機選取的 a，電腦驗算以高精度確認了 $J = K > 0$。

- 界限 $k = \frac{\pi}{2}$ 是最佳的：取 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，可得 $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$，對每個 $a > \frac{\pi}{2}$ 都是負數（例如當 $a = 2$ 時 $J \approx -0.766$）。

常見錯誤

- 忘記 $x = 0$ 處的邊界項為零是因為 $\tan 0 = 0$，而不是因為 $y(0)$ 滿足甚麼條件；題目對 $y(0)$ 沒有任何假設。
- 由 $I_1 = 0$ 推出 $y' + y\tan x = 0$ 時沒有說明理由：關鍵在於被積函數的連續性。
- 選取 b 時沒有檢查 $\tan bx$ 在 $[0,1]$ 上是否保持有限；條件 $a < \frac{\pi}{2}$ 正是由此而來。

STEP 之外

對於 $y(1) = 0$ 的不等式 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$，是 Wirtinger 不等式（Wirtinger's inequality，亦稱龐加萊（Poincaré）不等式）的一種形式，而常數 $\frac{\pi^2}{4}$ 是 $-y'' = \lambda y$ 在 $y'(0) = 0$、$y(1) = 0$ 條件下的最小特徵值（eigenvalue）；極值函數 $\cos\frac{\pi x}{2}$ 就是對應的特徵函數（eigenfunction）。在變分法（calculus of variations）中，借助一個精心選取的導數來配方，正是勒讓德（Legendre）和雅可比（Jacobi）判別法背後的想法，用以判斷一條駐定路徑（stationary path）是否真的是極小值。想找更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於背後的特徵值問題，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。