詳細解答

# STEP III 2014，第 3 題

純數學 • 到拋物線的距離

**STEP III 2014，第 3 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q3

## 關鍵思路

拋物線（parabola）上每一點都可以寫成 $(at^2, 2at)$，因此我們需要的每個距離都變成單一變量 $t$ 的函數；而在兩個部分中，這個函數原來都是二次函數（quadratic）（對直線而言是 $t$ 的二次函數，對點而言是 $t^2$ 的二次函數）。求二次函數的最小值只不過是配方（completing the square），但我們必須留意變量可以取值的範圍：$t^2$ 不可以是負數，而正是這個限制把第 (ii) 部分分成不同情況。至於圓的部分則唾手可得，因為一點到一個圓的距離，就是該點到圓心的距離減去半徑。

## 解答

### 第 (i) 部分

把 $L$ 寫成 $mx - y + c = 0$。拋物線上的點 $P = (at^2, 2at)$ 到 $L$ 的垂直距離（perpendicular distance）是

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

設 $f(t) = mat^2 - 2at + c$。由於 $ma > 0$，配方得

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

所以 $f$ 的最小值是 $\dfrac{mc - a}{m}$，在 $t = 1/m$ 時取得。

**情況** $mc > a$。此時對每個 $t$ 都有 $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$，因此整條拋物線位於 $L$ 的同一側，永不與之相交。$L$ 與拋物線之間的最短距離，就是拋物線上的點到 $L$ 的最小距離，

即 $|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$ 的最小值：

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

正如所求。最近的點是 $t = 1/m$，該處拋物線切線（tangent）的斜率為 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$：切線與 $L$ 平行，與幾何直覺一致。

**情況** $mc \le a$。此時 $f(1/m) \le 0$，而當 $t \to \infty$ 時 $f(t) \to +\infty$。由於 $f$ 是連續（continuous）的，存在某個 $t$ 使 $f(t) = 0$，所以 $L$ 與拋物線相交，最短距離為 0。

**第 (ii) 部分：點** $(p, 0)$

由 $C = (p, 0)$ 到 $P = (at^2, 2at)$ 的距離的平方是

$$(at^2 - p)^2 + 4a^2t^2.$$

這只取決於 $u = t^2$，而 $u$ 可取 $[0, \infty)$ 中的每一個值。因此我們要求

$$g(u) = (au - p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

的最小值。配方得

$$g(u) = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + 4a(p-a).$$

**想一想** 不受限制時，$g$ 的最小值在 $u = (p-2a)/a$ 取得。這個值是否總是可以取到？

不是：$u = t^2$ 必須是非負數，而只有當 $p \ge 2a$ 時才有 $(p-2a)/a \ge 0$。

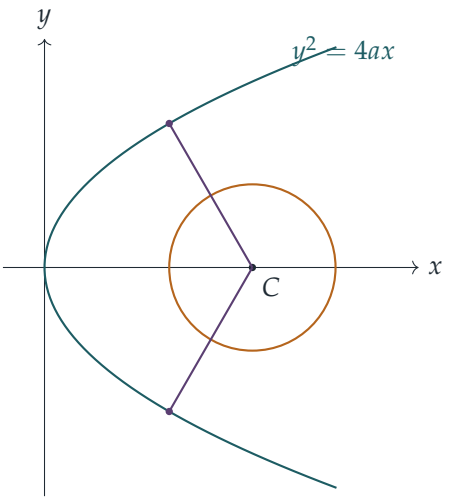
**情況** $p/a > 2$。頂點（vertex）$u = p/a - 2$ 是正數，因此可以取到，$g$ 的最小值是 $4a(p-a)$；由於 $p > 2a > a$，這個值是正數。最短距離是

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

在兩點 $(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)})$ 取得。

**情況** $p/a \le 2$。頂點位於 $u \le 0$，因此 $g$ 在 $u \ge 0$ 上遞增，其在該範圍內的最小值是 $g(0) = p^2$。最短距離是 $p$，在拋物線的頂點 $(0, 0)$ 取得。

兩個答案在 $p = 2a$ 時吻合，兩者都給出 $2a$。




圖中所示為 $a = 1$、$p = 5$ 的情況：拋物線上最接近 $C$ 的點（紫色）距離為 $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$，而以 $C$ 為圓心、半徑為 $b = 2$ 的圓（琥珀色）與拋物線保持 2 的距離。

**第 (ii) 部分：圓**

設 $d$ 為剛才求得的由 $C = (p, 0)$ 到拋物線的距離，即

$$d = \begin{cases} p & \text{若} p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{若} p > 2a. \end{cases}$$

該圓的圓心為 $C$，半徑為 $b$。

**若** $d > b$。在拋物線上任取一點 $P$，在圓上任取一點 $Q$。由三角不等式（triangle inequality），

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

當 $P$ 是拋物線上最接近 $C$ 的點，而 $Q$ 是線段 $CP$ 與圓的交點時（由於 $|CP| = d > b$，線段確實與圓相交），等號成立。因此最短距離是 $d - b$。

**若** $d \leq b$。當 $P$ 沿拋物線移動時，$|PC|$ 由其最小值 $d \leq b$ 連續地變化至任意大的值，因此在某處有 $|PC| = b$。該點同時位於兩條曲線上，最短距離為 0。

綜合以上，圓與拋物線之間的最短距離是

$$\begin{cases} p - b & \text{若} p \leq 2a \text{ 且} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)} - b & \text{若} p > 2a \text{ 且} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{其他情況（即若} b \geq d\text{）.} \end{cases}$$

## 驗算

- 取 $m=1$、$c=2$、$a=1$，則 $mc=2>a$。公式給出 $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.7071$；直接計算，$t=1$ 的點是 $(1,2)$，它到 $x-y+2=0$ 的距離是 $|1-2+2|/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}$。若改取 $c=\frac{1}{2}$（使 $mc<a$），直線 $y=x+\frac{1}{2}$ 與 $y^2=4x$ 相交於滿足 $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$ 之處，此方程有實根，確認距離為 0。
- 取 $a=1$、$p=5$：點 $(3,\pm 2\sqrt{3})$ 與 $(5,0)$ 的距離為 $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$，而以電腦在拋物線上搜索，找不到更近的點。
- 當 $p\to 0$ 時距離 $p\to 0$，這是正確的，因為 $(0,0)$ 在拋物線上。當 $p$ 很大時，$2\sqrt{a(p-a)}<p$，這是必然的，因為頂點的距離是 $p$。
- 所有結果都經電腦以數百組隨機選取的 $m$、$c$、$a$、$p$ 和 $b$ 搜索驗證。

## 常見錯誤

- 把距離平方對 $t$ 的導數（derivative）設為零時，遺漏了根 $t=0$，或忘記當 $p<2a$ 時 $t^2=p/a-2$ 無解：分情況討論正是第 (ii) 部分的重點所在。
- 在 $mc<a$ 時仍給出 $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$：這個值是負數，而且直線其實與拋物線相交。
- 在圓的部分寫出 $d-b$ 而不檢查其正負；當 $b\geq d$ 時兩條曲線相交，答案是 0。

## STEP 之外

第 (ii) 部分中的最近點，正是 $CP$ 為拋物線法線（normal）之處，而在 $p=2a$ 處的轉變並非偶然：$(2a,0)$ 是拋物線在頂點處的曲率中心（centre of curvature）。在它之外的點，在對稱軸以外有兩個最近點；這類轉變點的軌跡稱為漸屈線（evolute），是曲線微分幾何（differential geometry）中的經典對象。在受限制的範圍內求函數的最小值，而答案可能位於邊界而非駐點（stationary point），正是約束優化（constrained optimisation）的起點。如想做更多同類型的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。