詳細解答

STEP III 2014，第 2 題

純數學 • 雙曲函數積分法

STEP III 2014，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q2

關鍵思路

兩個被積函數（integrand）的分母都是 $\cosh 2x$，而倍角公式（double-angle formula）既可以用 $\cosh^2 x$ 表示，也可以用 $\sinh^2 x$ 表示。選取與分子配合的那個版本，每個積分便會化成標準的有理函數積分。至於最後一部分，竅門是回到指數函數：令 $u = \mathrm{e}^x$，兩個被積函數都會變成分母為 $1 + u^4$ 的 u 的有理函數（rational function），而把它們適當組合，恰好得到 $1/(1+u^4)$。

解答

第 (i) 部分

我們利用 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$。令 $u = \cosh x$，則 $\mathrm{d}u = \sinh x \, \mathrm{d}x$，所以

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

分母可因式分解為 $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$，而兩個因式相差 2，所以

$$\frac{1}{2u^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

每一項積分後都是對數，並因 u 的係數而多出因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

這就是所求結果。（事實上 $\cosh x \geq 1$ 使得 $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$，所以對實數 x 而言，絕對值符號並非必要。）

第 (ii) 部分

現在分子是 $\cosh x$，即 $\sinh x$ 的導數（derivative），所以相應的代換（substitution）是 $u = \sinh x$，$\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$。寫成 $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$，得

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\,u) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) + C,\end{aligned}$$

這裏用了 $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$，其中 $a = \sqrt{2}$。

第 (iii) 部分

乍看之下，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ 裏完全沒有 cosh。

想一想 如果把所有東西都用 $u = \mathrm{e}^x$ 表示，$\cosh x/\cosh 2x$ 會變成甚麼樣子？

由於 $\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$ 及 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$，分子分母同乘 u^2，得

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

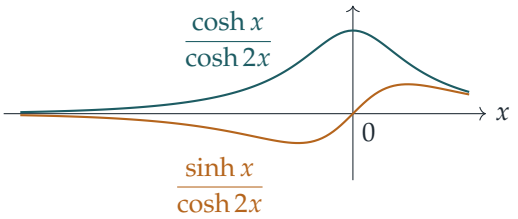
此外 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，所以多出來的因子 u 會約去：

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

第一式減去第二式，剩下 $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$。最後，$u$ 由 0 變到 1，即 $x = \ln u$ 由 $-\infty$ 變到 0。因此

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

右邊兩個積分都收斂（converge），因為當 $x \to -\infty$ 時，每個被積函數都是 $O(\mathrm{e}^x)$。（左邊是普通的積分，所以這其實只是一次變量代換，無窮的那一端來自 $u \to 0$。）



cosh 的積分。由第 (ii) 部分，當 $x \to -\infty$ 時 $\sinh x \to -\infty$，所以 $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$。因此

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh 的積分。由第 (i) 部分，當 $x \to -\infty$ 時 $\cosh x \to \infty$，所以對數內的分數趨向 1，對數則趨向 0。在 $x = 0$ 處，$\cosh 0 = 1$，所以

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

有理化（rationalising）後，$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$，而 $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，所以

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

這個值是負數，理應如此：當 $x < 0$ 時 $\sinh x < 0$（見琥珀色曲線）。

綜合起來。

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

正如所求。

驗算

- 把 (i) 和 (ii) 的答案求導，應還原為被積函數；就 (ii) 而言，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$。
- 最終數值為 ≈ 0.86697，與用辛普森法則（Simpson's rule）計算 $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$ 的結果相符。它合理地介乎 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$（較小的函數 $1/(1+u^2)$ 的積分）與 1 之間。
- 另外，兩個無窮積分亦已用數值方法分別核實：$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$ 及 $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分也用 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$：當 $u = \sinh x$ 時，你需要的是 $\sinh^2$ 的形式，即 $1 + 2\sinh^2 x$。
- 忘記當 $u = \mathrm{e}^x$ 時 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$；正是這個因子約去了分子中多餘的 u。
- 弄錯積分上下限：$u \in [0,1]$ 對應的是 $x \in (-\infty, 0]$，而不是 $[0,1]$。

STEP 之外

同一個積分也可以直接用部分分式（partial fractions）來做，因為 $1+u^4=(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$；而利用 $\frac{1+u^2}{1+u^4}$ 與 $\frac{1-u^2}{1+u^4}$ 的組合，是一條省去大部分代數運算的巧妙捷徑。在大學裏，像 $\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4)=\pi/(2\sqrt{2})$ 這類積分，用圍道積分（contour integration）和留數定理（residue theorem）一行就能完成，而反常積分（improper integral）則會在分析（analysis）課程中以完全嚴謹的方式處理。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是領略複分析這一面的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。