詳細解答

STEP III 2014，第 13 題

概率與統計 • 概率生成函數

> **STEP III 2014，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q13

關鍵思路

就第一回合的結果作條件分析。這個遊戲沒有記憶：在任何一個遊戲得以繼續的回合之後，接下來的進程就是同一個遊戲的全新副本，因此從那一刻起的額外得分與 N 本身具有相同的分佈（distribution）。這樣便得到一條以 G 自身表示 G 的方程，我們解出這條方程，再把結果展開成幾何級數（geometric series）。

解答

記 $p_n = P(N = n)$，於是 $G(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n$。設 E_1、E_2、E_3 分別為第一回合結果是 1、2 或 3 的事件，因此 $P(E_1) = a$、$P(E_2) = b$、$P(E_3) = c$。

第 (i) 部分

在 E_1 發生的條件下，遊戲以得分 0 結束，所以 $P(N = 0 \mid E_1) = 1$，而當 $n \geq 1$ 時 $P(N = n \mid E_1) = 0$。因此條件生成函數（conditional generating function）為

$$\sum_{n\geq 0} P(N = n \mid E_1)\, t^n = 1 \cdot t^0 = 1.$$

第 (ii) 部分

在 E_2 發生的條件下，第一回合後得分仍是 0，遊戲繼續。由於每個回合的概率相同，而且不受之前的結果影響，從第二回合起的各回合便構成一個從得分 0 開始的全新遊戲。設 N' 為這個新遊戲所產生的得分，它與 N 同分佈。最終得分為 $0 + N' = N'$，所以

$$P(N = n \mid E_2) = P(N' = n) = p_n \quad \text{對所有} n \geq 0,$$

而條件生成函數為 $\sum p_n t^n = G(t)$。

第 (iii) 部分

同理，在 E_3 發生的條件下，第一回合後得分為 1，其餘部分是一個得分為 N' 的全新遊戲，所以最終得分為 $1 + N'$。因此 $P(N = 0 \mid E_3) = 0$，而當 $n \geq 1$ 時 $P(N = n \mid E_3) = p_{n-1}$；條件生成函數為 $\sum_{n\geq 1} p_{n-1} t^n = tG(t)$。

根據全概率定律（law of total probability），

$$p_n = a\,P(N = n \mid E_1) + b\,P(N = n \mid E_2) + c\,P(N = n \mid E_3).$$

$G(t)$ 中 t^n 的係數是 p_n。在右邊，1、$G(t)$ 和 $tG(t)$ 中 t^n 的係數恰好就是第 (i)–(iii) 部分所得的 $P(N = n \mid E_1)$、$P(N = n \mid E_2)$ 和 $P(N = n \mid E_3)$。所以對所有 $n \geq 0$，$G(t)$ 與 $a + bG(t) + ctG(t)$ 中 t^n 的係數都相等，這就證明了

$$G(t) = a + bG(t) + ctG(t).$$

想一想 我們可以除以 $1 - b - ct$ 嗎？把它展開成幾何級數又是否合理？

移項得 $G(t)(1 - b - ct) = a$。由於 $1 - b = a + c > c > 0$，只要 $|t| < (1 - b)/c$，便有 $1 - b - ct \neq 0$；又因為 $(1 - b)/c = 1 + a/c > 1$，這個範圍包含 $|t| \leq 1$。對於這樣的 t，

$$G(t) = \frac{a}{1 - b - ct} = \frac{a}{1 - b} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{ct}{1 - b}} = \frac{a}{1 - b} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{c}{1 - b}\right)^n t^n,$$

因為 $|ct/(1 - b)| < 1$。讀出 t^n 的係數，得

$$P(N = n) = \frac{ac^n}{(1 - b)^{n+1}}, \qquad n \geq 0.$$

（等價地，比較係數可得 $p_0 = a + bp_0$，以及當 $n \geq 1$ 時 $p_n = bp_n + cp_{n-1}$，即 $p_0 = a/(1 - b)$ 及 $p_n = \frac{c}{1-b} p_{n-1}$，同樣得出上述公式。）

第 (iv) 部分

平均值（mean）為 $\mu = G'(1)$。對 $G(t) = a(1 - b - ct)^{-1}$ 求導，

$$G'(t) = \frac{ac}{(1 - b - ct)^2}, \qquad \text{因此} \qquad \mu = G'(1) = \frac{ac}{(1 - b - c)^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a},$$

這裏用了 $1 - b - c = a$。於是 $1 + \mu = \dfrac{a + c}{a} = \dfrac{1 - b}{a}$，所以

$$\frac{\mu^n}{(1 + \mu)^{n+1}} = \frac{c^n}{a^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{(1 - b)^{n+1}} = \frac{ac^n}{(1 - b)^{n+1}} = P(N = n),$$

得證。

驗算

- 概率總和為 1：$\sum_n p_n = G(1) = a/(1-b-c) = a/a = 1$。
- 直接論證：忽略那些「白費」的結果 2 回合。餘下的每個回合，以概率 $a/(a+c)$ 結束遊戲，或以概率 $c/(a+c)$ 得一分，所以 N 是第一次結束之前所得的分數，而 $P(N=n) = \left(\frac{c}{a+c}\right)^n \frac{a}{a+c}$；由於 $a+c = 1-b$，這與上述公式相同。
- 取 $a = \frac{1}{5}$、$b = \frac{3}{10}$、$c = \frac{1}{2}$，得 $\mu = \frac{5}{2}$，以及 $P(N=0) = \frac{2}{7} \approx 0.2857$、$P(N=1) = \frac{10}{49} \approx 0.2041$。以電腦模擬 2×10^5 局遊戲，得到 0.2855、0.2038，平均得分為 2.498。

常見錯誤

- 把情況 3 的條件生成函數寫成 $G(t)$ 而不是 $tG(t)$：已經得到的那一分會令 t 的每個冪次都提高一次。
- 忘記說明爲何第一回合之後的遊戲是原遊戲的副本：這有賴每個回合的概率都相同，而且與過去獨立。

STEP 之外

就第一步作條件分析，是馬可夫鏈（Markov chain）理論的基本工具，在該理論中稱為首步分析（first-step analysis）；而這裏的答案其實是一個經過偽裝的幾何分佈（geometric distribution）。第 (iv) 部分說明，在 $\{0,1,2,\dots\}$ 上的幾何分佈單憑其平均值便可確定。同樣的「為 G 建立方程」技巧也可處理分支過程（branching process），並由此導出關於一個姓氏最終消失的概率的著名結果。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對生成函數和分支過程的講解非常易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。