詳細解答

STEP III 2014，第 12 題

概率與統計 • 對數正態分佈

> **STEP III 2014，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q12

關鍵思路

由於 $y = \mathrm{e}^x$ 是嚴格遞增（strictly increasing）的，只要取對數（logarithm），關於 Y 的命題便可化為關於 X 的命題：$Y \leq y$ 當且僅當 $X \leq \ln y$。這樣便能立即得出 Y 的中位數（median）和密度。至於平均值（mean），技巧在於把指數部分配方（complete the square），使被積函數變成另一個正態分佈的密度函數，而我們早已知道它的積分等於 1。

解答

第 (i) 部分

由於 e^x 嚴格遞增，事件 $\{Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\}$ 與事件 $\{X \leq x_m\}$ 是同一個事件。因此

$$\mathrm{P}(Y \leq \mathrm{e}^{x_m}) = \mathrm{P}(X \leq x_m) = \tfrac{1}{2},$$

所以 Y 的中位數是

$$y_m = \mathrm{e}^{x_m}.$$

（中位數可以這樣經過任何遞增函數而保持對應；平均值卻不可以，第 (iv) 部分會說明這一點。）

第 (ii) 部分

Y 只取正值。對於 $y > 0$，設 G 為 Y 的累積分佈函數（cumulative distribution function）。利用與前面相同的等價關係，

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \ln y) = F(\ln y).$$

利用連鎖法則（chain rule）求導，並使用 $F' = f$，得

$$g(y) = G'(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(\ln y)}{y}, \qquad y > 0,$$

此即所求（而當 $y \le 0$ 時 $g(y) = 0$）。

眾數（mode）λ 是 g 取最大值之處。它位於開區間 $(0, \infty)$ 內，而 g 在該區間上可導，所以 $g'(\lambda) = 0$。由商法則（quotient rule），

$$g'(y) = \frac{f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot y - f(\ln y)}{y^2} = \frac{f'(\ln y) - f(\ln y)}{y^2}.$$

由於 $y^2 \neq 0$，令 $g'(\lambda) = 0$ 便得

$$f'(\ln \lambda) = f(\ln \lambda),$$

這正是所求的條件。

第 (iii) 部分

函數

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$$

正好是一個 $\mathrm{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ 隨機變量（random variable）的概率密度函數（probability density function）：它就是題目給出的正態密度，只是把 μ 換成 $\mu + \sigma^2$。任何概率密度函數在整條實數線上的積分都等於 1，這便解釋了題目所述的積分。

現在

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x.$$

我們把合併後的指數配方。展開 $(x - \mu - \sigma^2)^2 = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$，得

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

常數 $\mathrm{e}^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ 可提到積分號外，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

這裏用到了上面解釋過的積分。這就是所求的結果。

第 (iv) 部分

我們把三個量都明確求出來。

中位數。正態密度關於 μ 對稱，所以 $x_m = \mu$，再由第 (i) 部分得 $y_m = \mathrm{e}^{\mu}$。

眾數。對正態密度求導，

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

想一想 當 f 永不為零時，我們該如何運用第 (ii) 部分的條件？

由於對每個 x 都有 $f(x) > 0$，我們可以把條件 $f'(\ln\lambda) = f(\ln\lambda)$ 除以 $f(\ln\lambda)$，得到

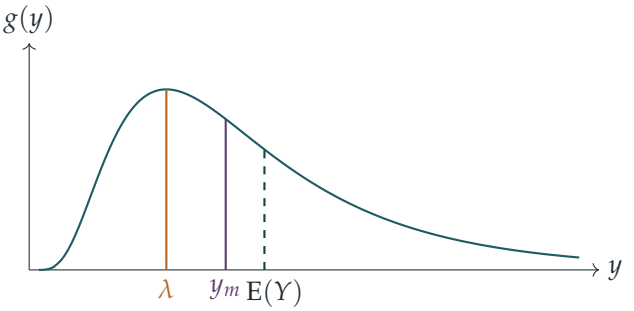
$$-\frac{\ln\lambda - \mu}{\sigma^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\lambda = \mu - \sigma^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}.$$

這是 g 唯一的駐點（stationary point），而題目已告訴我們 Y 有唯一的眾數，所以它就是眾數。

比較。由於 $\sigma > 0$，我們有 $\mu - \sigma^2 < \mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$，而 e^t 嚴格遞增，所以

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2} \;<\; y_m = \mathrm{e}^{\mu} \;<\; \mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

此即所求。這些嚴格不等式（inequality）依賴於 $\sigma^2 > 0$，而這對任何真正的正態分佈（normal distribution）都成立。



上圖顯示 $\mu = 0$、$\sigma = 0.6$ 時 Y 的密度：右邊長長的尾部把平均值拉到最右，中位數居中，而峯值則在兩者的左邊。

驗算

- 當 $\sigma \to 0$ 時，Y 集中於 e^{μ}，三個值都趨向 e^{μ}，理應如此。
- 取 $\mu = 0$、$\sigma = 1$：$\lambda = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$，$y_m = 1$，而 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{1/2} \approx 1.649$。對 $\mathrm{e}^x f(x)$ 作數值積分，以及以數值方法搜尋 g 的最大值，結果都與這些數值吻合。

- 比值 $\mathrm{E}(Y)/\lambda = \mathrm{e}^{3\sigma^2/2}$ 只取決於 σ，這是合理的：改變 μ 只是把 Y 乘以因子 e^{μ} 作縮放。

常見錯誤

- 把 Y 的密度寫成 $f(\ln y)$，忘記了連鎖法則帶來的因子 $1/y$。缺少這個因子，眾數便會算成 e^{μ}，與中位數相同。
- 誤以為 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$。這對中位數成立，但對平均值不成立。
- 配方時出現正負號錯誤：要小心展開 $(x-\mu-\sigma^2)^2$，並檢查剩下的常數。

STEP 之外

這裏的 Y 服從對數正態（lognormal）分佈，常用來為收入、股價和粒子大小建立模型。不等式 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{X}) \geq \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$ 是凸函數（convex function）的琴生不等式（Jensen's inequality）的一個特例，而第 (iii) 部分的計算其實就是正態分佈的矩母函數（moment generating function）$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ 在 $t = 1$ 時的值。Blitzstein 與 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）涵蓋了隨機變量的變換、矩母函數以及對數正態分佈。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。