詳細解答

# STEP III 2014，第 11 題

力學 • 圓周運動

**STEP III 2014，第 11 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q11

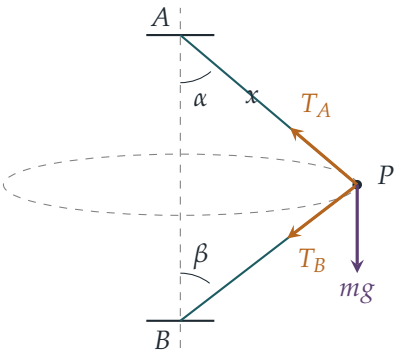
## 關鍵思路

質點受三個力作用（兩條繩的張力（tension）及其重量），三者合起來必須恰好提供圓周運動所需的向心力（centripetal force）。分別沿鉛垂及水平方向分解，便得到關於兩個張力的兩條線性方程。繩只能拉不能推，故 $T_B \geq 0$，由此得出所求的不等式。在臨界情況下，下方的繩變得鬆弛，而在三角形 $ABP$ 中應用餘弦定理（cosine rule），便可知道 $\alpha$ 可以取哪些角度。

## 解答

### 建立模型

把 $P$ 視為質點，兩條繩視為輕而不可伸長。$P$ 在一個以直線 $AB$ 上一點為圓心的水平圓上運動，半徑為 $r = x\sin\alpha$，所以其加速度為 $\omega^2 x\sin\alpha$，方向水平指向軸線。張力 $T_A$ 沿 $PA$ 作用，與向上的鉛垂線成角 $\alpha$。張力 $T_B$ 沿 $PB$ 作用，與向下的鉛垂線成角 $\beta$。



### 求張力

沿鉛垂方向（鉛垂方向沒有加速度）及沿水平指向軸線的方向分解：

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

即使 $\beta$ 是鈍角，即 $P$ 位於 $B$ 之下，這兩條方程仍然成立，因為此時 $\cos\beta < 0$，$T_B$ 的鉛垂分量指向上方，正合實際情況。

要消去 $T_B$，把 (1) 乘以 $\sin\beta$，(2) 乘以 $\cos\beta$，然後相加。利用 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$，得

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

要消去 $T_A$，把 (2) 乘以 $\cos\alpha$，(1) 乘以 $\sin\alpha$，然後相減：

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

這裏 $\alpha$ 和 $\beta$ 是三角形 $ABP$ 的兩個內角，所以 $0 < \alpha+\beta < \pi$，從而 $\sin(\alpha+\beta) > 0$。此外 $\sin\alpha > 0$。拉緊的繩滿足 $T_B \geq 0$，因此

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

即所求。

### 情況 $\omega^2 x\cos\alpha = g$

此時 $T_B = 0$：下方的繩剛好拉直，但沒有張力。於是方程 (1) 給出

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

這與 (2) 一致，因為此時 (2) 給出 $T_A = m\omega^2 x$。另外注意 $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$，所以 $\alpha$ 是銳角。

> ? **想一想** 一條只涉及 $h$、$d$ 和 $\alpha$ 的不等式，究竟從何而來？

它來自幾何，而不是力學。在三角形 $ABP$ 的頂點 $A$ 處應用餘弦定理：

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

長度 $x$ 是這個二次方程（quadratic equation）的實根，所以其判別式（discriminant）非負：

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

由於 $\alpha$ 是銳角且 $h > d$，$h\cos\alpha$ 和 $\sqrt{h^2-d^2}$ 均為正數，因此可以兩邊開平方，得

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

### $T_A$ 的上下界

質點確實不在軸線上，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，從而 $0 < \cos\alpha < 1$。因此 $T_A = mg/\cos\alpha > mg$。至於另一個界，由上一個結果得 $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2-d^2}/h$，所以

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2-d^2}}.$$

### 何時取得上界

等號成立需要 $h\cos\alpha = \sqrt{h^2-d^2}$，即判別式為零，此時二次方程有重根

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2-d^2}.$$

於是 $x^2+d^2=h^2$，即 $AP^2+BP^2=AB^2$。根據畢氏定理的逆定理（converse of Pythagoras' theorem），角 $APB$ 是直角：兩條繩互相垂直，而 $P$ 位於以 $AB$ 為直徑的圓上。換一個說法，$AP$ 是以 $B$ 為圓心、半徑為 $d$ 的圓的切線（tangent），這正是 $\alpha$ 在此位置取得最大可能值的原因。在這個位置，$\sin\alpha = d/h$，而 $P$ 位於 $B$ 之上 $d^2/h$ 的高度。對於不等式容許的其他任何銳角 $\alpha$，都有兩個可能的三角形（兩個 $x$ 值），而兩者在這個位置合而為一。

## 驗算

- 若 $\omega$ 非常大，則 $T_B \approx m\omega^2 x\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$ 以 $\omega^2$ 的量級增長，因為此時兩條繩都必須提供很大的向心力。
- 在極端位置取 $h=3$、$d=2$：$\cos\alpha=\sqrt{5}/3$，$x=\sqrt{5}$，且 $x^2+d^2=5+4=9=h^2$。於是 $T_A/(mg)=3/\sqrt{5}\approx 1.342$，等於 $h/\sqrt{h^2-d^2}$。
- 以電腦檢查多個隨機構形，把 $T_A$ 和 $T_B$ 的公式代回向量形式的運動方程，所得殘差均為零。

## 常見錯誤

- 把圓的半徑當成 $x$，而不是 $x\sin\alpha$。
- 把 $T_B$ 的鉛垂方向弄反。由於 $\beta$ 是從 $BA$ 量起，繩 $PB$ 把 $P$ 向下拉（當 $\beta$ 是銳角時）。
- 沒有先確認兩邊都是正數，便把不等式兩邊平方或開平方。

## STEP 之外

臨界情況 $T_B = 0$ 是一個約束變成非作用（inactive）的例子：繩是一種單邊約束（one-sided constraint），只能拉、不能推。這類帶有不等式約束的問題，在力學和最優化中會引出帶符號條件的拉格朗日（Lagrange）乘數（Lagrange multipliers）。圓錐擺（conical pendulum）及其相關問題，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有很好的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。