詳細解答

STEP III 2014，第 10 題

力學 • 耦合振動

> **STEP III 2014，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.2 節簡正模式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/normal-modes.html

關鍵思路

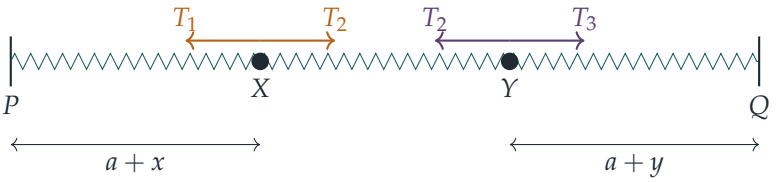
把所有東西放在同一條直線上，只用一個坐標，以 x 和 y 表示每條彈簧的伸長量（extension），然後由牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）得出兩條耦合方程（coupled equations）。具有這種對稱性的耦合方程，只要相加和相減就可以分離：$x-y$ 和 $x+y$ 各自滿足一條簡單的簡諧方程，而且頻率不同。Y 會否回到原處，就取決於這兩個頻率之比是否有理數（rational）。

解答

運動方程

把 X 和 Y 視為質點，彈簧視為輕彈簧並遵守胡克定律（Hooke's law）；桌面光滑，所以唯一的水平力就是彈簧的張力（tension）。所有力都沿直線 PQ 作用，運動亦一直在這條直線上。

沿直線從 P 起，以指向 Q 的方向量度位置，於是 P 位於 0，Q 位於 $3a$。這樣 X 位於 $a+x$，而 Y 位於 $3a-(a+y)=2a-y$。



三條彈簧的長度和張力如下（由胡克定律，張力 $=$ $\lambda \times$ 伸長量$/a$，負值表示推力（thrust））：

$$PX:\ \text{長度} a+x, \qquad T_1 = \frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{長度} (2a-y)-(a+x) = a-x-y, \qquad T_2 = -\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{長度} a+y, \qquad T_3 = \frac{\lambda y}{a}.$$

受張力的彈簧會把兩端互相拉近。所以 X 受到指向 P 的 T_1 和指向 Y 的 T_2；取 $P \to Q$ 方向為正，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -T_1 + T_2 = -\frac{\lambda}{a}x - \frac{\lambda}{a}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

正是所求。（正負號會自動處理好：若 $T_2 < 0$，彈簧 XY 受壓縮，會把 X 推向 P。）

至於 Y，它的位置是 $2a-y$，所以它在正方向的加速度是 $-\ddot{y}$。它受到指向 X 的 T_2（負方向）和指向 Q 的 T_3（正方向）：

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -T_2 + T_3 = \frac{\lambda}{a}(x+y) + \frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{所以} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

這就是把第一條方程中的 x 和 y 互換，正如裝置的對稱性（對 PQ 的中點作反射）所要求的一樣。

組合 $x-y$

把兩條方程相減，

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right] = -\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

設 $\omega^2 = \lambda/(ma)$，上式就是 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\omega^2(x-y)$，即簡諧運動（simple harmonic motion），所以

$$x - y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

起初 $XP = a$ 而 $YQ = \frac{1}{2}a$，所以在 $t = 0$ 時 $x = 0$、$y = -\frac{1}{2}a$，得 $x - y = \frac{1}{2}a$，因此 $A = \frac{1}{2}a$。兩質點由靜止釋放，所以在 $t = 0$ 時 $\dot{x} = \dot{y} = 0$；求導後得 $\omega B = 0$，所以 $B = 0$。因此

$$x - y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

組合 $x+y$

改為把兩條方程相加，

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y)=-\frac{\lambda}{a}(3x+3y),\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y)=-3\omega^2(x+y).$$

這是角頻率（angular frequency）為 $\sqrt{3}\,\omega$ 的簡諧運動，所以 $x+y=C\cos\sqrt{3}\,\omega t+D\sin\sqrt{3}\,\omega t$。在 $t=0$ 時，$x+y=-\frac{1}{2}a$ 且其導數為 0，所以 $C=-\frac{1}{2}a$、$D=0$：

$$x+y=-\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

Y 永不回到原處

取兩個結果之差的一半，得

$$y=\tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big]=-\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

（同理 $x=\frac{1}{4}a(\cos\omega t-\cos\sqrt{3}\,\omega t)$。）$Y$ 回到初始位置，當且僅當 $y=-\frac{1}{2}a$，即

$$\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t=2.$$

想一想 兩個餘弦函數都是周期函數，那麼它們終究總會再次對齊吧？

每個餘弦值最多是 1，所以兩者之和等於 2 只有在某一時刻 $t>0$ 兩者同時等於 1 時才會發生。這需要

$$\omega t=2\pi n\quad\text{及}\quad\sqrt{3}\,\omega t=2\pi k$$

其中 n,k 為整數，且因 $t>0$ 而有 $n\geq 1$。兩式相除，$\sqrt{3}=k/n$ 便會是有理數，但它並不是。所以不存在這樣的 $t>0$，Y 永遠不會回到初始位置。兩個周期 $2\pi/\omega$ 和 $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$ 是不可公度（incommensurable）的，所以兩個振動永遠不會再次同步，儘管它們可以任意接近同步。

驗算

- 在 $t=0$ 時，公式給出 $x=\frac{1}{4}a(1-1)=0$ 及 $y=-\frac{1}{4}a(1+1)=-\frac{1}{2}a$，與起始位置吻合，而且兩個導數在該處都等於零。
- 彈簧 XY 的長度是 $a-x-y=a+\frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$，一直介乎 $\frac{1}{2}a$ 與 $\frac{3}{2}a$ 之間，所以兩質點永不相撞；同樣 $PX=a+x\geq\frac{1}{2}a$ 及 $YQ=a+y\geq\frac{1}{2}a$。整個過程中模型在物理上都合理。
- 取 $m=a=1$、$\lambda=2$ 以數值方法逐步模擬運動，直至 $t=20$，結果與 x 和 y 的公式相差少於 10^{-10}。以電腦在 $0<\omega t\leq 20\,000$ 範圍內搜尋，發現 $\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t$ 最接近 2 時可達 1.999995，但從未到達 2。

常見錯誤

- 弄錯 Y 方程的正負號：y 是從 Q 起量度的，所以 y 增加會使 Y 向負方向移動。
- 把 XY 的長度寫成 $a+x+y$ 而不是 $a-x-y$；x 和 y 增加都會令中間的彈簧變短。
- 只論證兩個周期不同。單是周期不同並不足夠（周期 1 和 2 在 $t=2$ 時會再次對齊）；關鍵在於兩者之比 $\sqrt{3}$ 是無理數（irrational）。

STEP 之外

組合 $x-y$ 和 $x+y$ 是這個系統的簡正模（normal modes）：它們是矩陣 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特徵向量（eigenvectors），對應的特徵值（eigenvalues）1 和 3 給出頻率的平方 ω^2 和 $3\omega^2$。耦合系統的每個微小振動都可以這樣分解為簡正模，而只有當所有頻率之比都是有理數時，運動才是周期的；否則運動是准周期（quasi-periodic）的，永不重複，但會任意接近其起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）講述耦合振子，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）則解釋背後的特徵向量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。