詳細解答

STEP III 2014，第 1 題

純數學 • 對數級數展開

> **STEP III 2014，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q1

關鍵思路

三次多項式（cubic）$1+qx^2+rx^3$ 可因式分解為 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$，因此它的對數（logarithm）可拆成三個對數之和，而每個對數的級數（series）我們都已知道。這樣便能以 a、b、c 表示 x^n 的係數（coefficient）。我們亦可把同一個對數直接展開為 $\ln(1+u)$，其中 $u=qx^2+rx^3$，從而以 q 和 r 表示各係數。比較這兩個展開式，便可把關於 q 和 r 的事實轉化為各 S_n 之間的恆等式（identity）。

解答

展開得

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

由於 $a+b+c=0$，x 項消失。兩個對所有實數 x 都相等的多項式，其係數必然相等，因此把 x^2 和 x^3 的係數與 $1+qx^2+rx^3$ 比較，得

$$q=bc+ca+ab, \qquad r=abc,$$

此即所求。

第 (i) 部分

當 $|x|$ 足夠小（具體而言，$|x|<1/\max(|a|,|b|,|c|)$；若 $a=b=c=0$，則任何 x 皆可），每個因子都是正數，而每個對數都有收斂（convergent）的級數。利用 $|t|<1$ 時

$\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$，

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

所以 x^n 的係數是 $(-1)^{n+1}S_n$，此即所求。（當 $n=1$ 時，這是 $S_1 = a+b+c = 0$，與沒有 x 項的事實吻合。）

第 (ii) 部分

現在用第二種方法展開同一個函數。設 $u = qx^2+rx^3$，則

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u 的每一項次數至少為 2，所以 u^k 只涉及 x^{2k} 至 x^{3k} 的冪。要求 x^n 的係數，只需考慮滿足 $2k \leq n \leq 3k$ 的 u^k：

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

因此：

- x^2：只有 u 有貢獻，得 q；
- x^3：只有 u 有貢獻，得 r；
- x^5：只有 $-\frac{1}{2}u^2$ 有貢獻，得 $-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$。

與第 (i) 部分比較，該處的係數分別是 $-S_2$、S_3 和 S_5，故

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

因此 $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$，此即所求。

想一想 為甚麼我們可以比較同一個函數的兩個不同級數的係數？

兩個展開式都是 x 的冪級數（power series），並在 0 附近的某個區間上收斂至 $\ln(1+qx^2+rx^3)$。在 0 附近收斂的冪級數，其係數是唯一的（它們就是函數在 0 處的導數除以 $n!$，正如麥克勞林定理（Maclaurin's theorem）所述），因此兩組係數必然相同。

第 (iii) 部分

對於 x^7，我們需要 $2k \le 7 \le 3k$，這迫使 $k = 3$。用二項式定理（binomial theorem）展開 $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$，

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

所以 $\ln(1+u)$ 中 x^7 的係數是 $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$。由第 (i) 部分，該係數是 $(-1)^8 S_7 = S_7$，所以 $S_7 = q^2r$。利用第 (ii) 部分，

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

此即所求。

第 (iv) 部分

對於 x^9，我們需要 $2k \le 9 \le 3k$，所以 $k = 3$ 或 $k = 4$。

- 來自 $\frac{1}{3}u^3$：u^3 的 x^9 項是 r^3x^9，得 $\frac{1}{3}r^3$。
- 來自 $-\frac{1}{4}u^4$：在 $(qx^2 + rx^3)^4$ 中，x^9 項需要三個 qx^2 因子和一個 rx^3 因子，得 $\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$。這貢獻 $-q^3r$。

所以 x^9 的係數是 $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$，而由第 (i) 部分，它等於 $(-1)^{10}S_9 = S_9$。另一方面，

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

因此

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

而命題 $S_2S_7 = S_9$ 成立當且僅當 $abc = 0$。一般而言它並不成立。

舉一個具體的反例（counterexample），取 $a = b = 1$、$c = -2$（於是 $a+b+c = 0$ 且 $abc = -2 \ne 0$）。則

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

所以 $S_2S_7 = -54 \ne -\frac{170}{3} = S_9$。命題不成立。

想一想 第 (ii) 和 (iii) 部分都行得通，為甚麼規律到了 x^9 就失效？

對於 x^5 和 x^7，只有一個 u 的冪有貢獻，所以每個係數都是 q 和 r 的單一乘積，而這乘積恰好能分解為適當的前面幾個 S 的乘積。到了 x^9，有兩個 u 的冪作出貢獻，而來自 u^3 的額外 r^3 項破壞了這種分解。

驗算

- 取 $a = b = 1$、$c = -2$，則 $q = -3$、$r = -2$。於是 $S_2 = 3 = -q$，$S_3 = (1 + 1 - 8)/3 = -2 = r$，$S_5 = (1 + 1 - 32)/5 = -6 = -qr$，所以 $S_2S_3 = S_5$。此外 $S_7 = -18 = q^2r$，而 $S_9 - S_2S_7 = -\frac{170}{3} + 54 = -\frac{8}{3} = \frac{1}{3}r^3$，與預測完全一致。
- 若 $c = 0$（於是 $b = -a$），所有奇數下標的 S_n 都等於零，(iv) 中命題的兩邊都是 0，與命題在 $abc = 0$ 時成立一致。
- (ii) 至 (iv) 的恆等式以及 $S_9 - S_2S_7$ 的公式，亦已用電腦以精確算術，對 200 組隨機選取的有理數 a 和 b 驗證。

常見錯誤

- 遺漏 u^4 對 x^9 的貢獻：很容易只考慮到 u^3 便停下，得出錯誤的係數 $\frac{1}{3}r^3$。
- $(-1)^{n+1}$ 引起的符號錯誤：x^2 的係數是 $-S_2$，所以 $S_2 = -q$，而不是 q。
- 忘記二項式係數：u^3 的 x^7 項是 $3q^2r$，而不是 q^2r。

STEP 之外

各 S_n（除了因子 $1/n$ 之外）就是三次多項式各根的冪和（power sums），而 q、r 則是它的基本對稱多項式（elementary symmetric polynomials）。取對數再比較係數，是牛頓恆等式（Newton's identities）的一個生成函數（generating function）證明；牛頓恆等式把每個冪和以基本對稱多項式表示，而其背後的定理是：每個對稱多項式都可以用基本對稱多項式表示。關於對稱多項式和多項式的根，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）；若想多做以級數為題材、STEP 風格的練習，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。