詳細解答

STEP II 2014，第 9 題

力學 • 剛體平衡

> **STEP II 2014，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q9

關鍵思路

未知的力有三個（張力（tension）、法向反作用力（normal reaction）和 A 處的摩擦力（friction）），而方程也有三條：水平方向分解、鉛垂方向分解，以及取力矩（moments）。關於角 A 取力矩是聰明的選擇，因為牆壁施加的兩個接觸力都作用於該點，因而在方程中消去，只剩下一條把張力和重量聯繫起來的方程。得到這條方程後，摩擦力的方向就只取決於單靠繩子所支撐的力比重量大還是小。

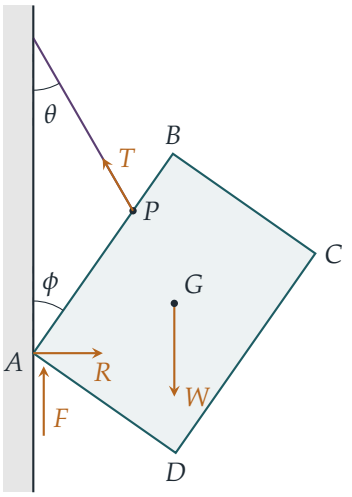
解答

我們把薄板（lamina）模型化為重量 W 的均勻剛體（uniform rigid body），其質心（centre of mass）G 位於長方形的中心；繩子則視為輕而不可伸長（light and inextensible），所以沿繩的張力 T 處處相同。在 A 處，牆壁施加一個法向反作用力 R（水平方向，背離牆壁）及一個摩擦力 F（鉛垂方向）。我們規定 F 以向上為正，所以若 F 為負，即表示摩擦力實際上向下作用。

設坐標軸，以 A 為原點，x 軸水平背離牆壁，y 軸鉛垂向上。邊 AB 與向上的鉛垂線成角 ϕ，所以沿 AB 的單位向量是 $(\sin\phi, \cos\phi)$。邊 AD 與之垂直，並指向背離牆壁的方向，所以其單位向量是 $(\cos\phi, -\sin\phi)$。因此

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

其中 P 是繫繩之點。繩子由 P 向上連到牆壁，與向下的鉛垂線成角 θ，所以作用於薄板的張力是 $T(-\sin\theta, \cos\theta)$。



第 (i) 部分

沿水平及鉛垂方向分解，

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

關於 A 取力矩時，R 和 F 沒有貢獻。一個作用於 (x, y) 的力 (f_x, f_y) 的逆時針力矩是 $xf_y - yf_x$。對於作用於 P 的張力，這是

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

而對於作用於 G 的重量 $(0, -W)$，則是 $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$。所以

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

量 $a\cos\phi + b\sin\phi$ 其實就是 G 與牆壁的水平距離，這是看出重量力矩的快捷方法。

在摩擦力向上的極限平衡（limiting equilibrium）中，$F = \mu R = \mu T\sin\theta$，所以鉛垂方向的方程變成

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

把 W 代入 (1)，並約去 T（由於繩子拉緊，它是正數），得

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

這就是 $(*)$。

第 (ii) 部分

若摩擦力達到極限並向下作用，則 $F = -\mu R = -\mu T\sin\theta$，而鉛垂方向的方程是 $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$。其餘一切不變，所以 $(*)$ 變成

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

即是把 μ 換成 $-\mu$。

第 (iii) 部分

現在我們不假設摩擦力達到極限。方程 (1) 在任何平衡狀態下都成立，並給出

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

而由於 θ 和 ϕ 都是銳角，所以 $\sin(\theta+\phi) > 0$。鉛垂方向的方程於是給出

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

想一想 怎樣把「$F > 0$」轉化為只涉及正切的條件？

摩擦力向上作用，當且僅當 $F > 0$，即是當且僅當

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

因為 $d\sin(\theta+\phi) > 0$。展開 $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$，並把兩邊除以 $\cos\theta\cos\phi$；由於兩個角都是銳角，這個數是正數，所以不等式方向不變：

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

由於 $\tan\theta + \tan\phi > 0$，充分必要條件是

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

（當 d 等於這個值時，完全沒有摩擦力；當 d 較小時，摩擦力向下作用。）

從物理上看，繩子繫在邊 AB 上，所以 $d \le 2b$。若條件成立，則

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

所以 $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$，即 $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$。取逆否命題（contrapositive）：若 $b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$，則繫繩點無論放在任何容許的位置，都不能使摩擦力向上作用，所以該條件不可能成立。證明完畢。

驗算

- 當 $\mu = 0$ 時牆壁光滑，$(*)$ 與其第 (ii) 部分的版本重合，理應如此。兩者都化為第 (iii) 部分的臨界情況 $d\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$。
- 薄板的 AB 鉛垂時（$\phi \to 0$）：臨界情況變成 $d\tan\theta = a$。這表示繩子的作用線（line of action）通過經過 G 的鉛垂線，該線與牆壁的水平距離為 a。這時單靠繩子和重量便能互相平衡，牆壁只需施加水平推力。
- 數值上，取 $a = 1$、$b = 1.5$、$\theta = 30°$、$\phi = 40°$：臨界值是 $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$。改為關於 G 而非 A 取力矩，直接解三條平衡方程，得出在略高於此值時 $F > 0$，略低於此值時 $F < 0$。用電腦檢驗數千個隨機配置，證實了 $(*)$、其第 (ii) 部分的形式，以及 (iii) 中的條件。

常見錯誤

- 關於 P 或 G 取力矩：這樣做可行，但會把 R 和 F 帶進力矩方程，令代數運算繁複得多。
- 弄錯 G 的位置：D 位於背離牆壁的一側，所以 AD 沿 $(\cos\phi, -\sin\phi)$ 方向，而 G 與牆壁的水平距離是 $a\cos\phi + b\sin\phi$。
- 在最後一部分忘記約束條件 $d \le 2b$；這是 AB 的長度唯一出現的地方。

STEP 之外

這是一個小型的靜定(statically determinate)問題：平面上的剛體有三個未知的力和三條獨立的平衡方程。工程師首先就會核對這個數目；若支撐點更多，單靠靜力學便無法求出各力，還需要知道物體如何變形。關於未知力的作用點取力矩這個技巧，是巧妙選取力矩原點的平面版本。如欲深入了解，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。