詳細解答

STEP II 2014，第 8 題

純數學 • 最大二項式係數

> **STEP II 2014，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q8

關鍵思路

要找出一個正項數列（sequence）在哪裏達到最大值，可以把每一項與下一項比較：考慮比值（ratio）c_{r+1}/c_r。對二項式展開（binomial expansion）而言，這個比值是 r 的一個簡單分式，而且穩定遞減，所以當它大於 1 時係數（coefficient）上升，一旦小於 1 係數便下降。最大的係數就在比值越過 1 的位置，而之後各部分都只需讀出某個式子的整數部分（integer part）。

解答

係數及其比值

由二項式定理（binomial theorem），

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

由於 $a, b > 0$，這些係數全部是正數。對 $0 \le r \le n-1$，

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

這裏用了 $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$。記

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

因為 $(r+1)a > 0$，

$$c_{r+1} \ge c_r \iff (n-r)b \ge (r+1)a \iff nb - a \ge r(a+b)$$
$$\iff r \le \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

而把各處換成 $=$ 後，同一串推導依然成立。因此

$$c_{r+1} > c_r \text{ 若} r < L-1, \qquad c_{r+1} = c_r \text{ 若} r = L-1, \qquad c_{r+1} < c_r \text{ 若} r > L-1. \qquad (*)$$

m 的上下界

上界（*upper bound*）。若 $m = 0$，由於 $L > 0$，有 $m \le L$。若 $m \ge 1$，由於 c_m 最大，有 $c_m \ge c_{m-1}$，再由 $(*)$ 取 $r = m-1$，得 $m-1 \le L-1$，即 $m \le L$。

下界（*lower bound*）。若 $m = n$，由於 $L < n+1$（因為 $\frac{b}{a+b} < 1$），有 $m \ge L-1$。若 $m \le n-1$，則 $c_m \ge c_{m+1}$，由 $(*)$ 取 $r = m$，便迫使 $m \ge L-1$。

所以在所有情況下都有

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \le m \le \frac{b(n+1)}{a+b},$$

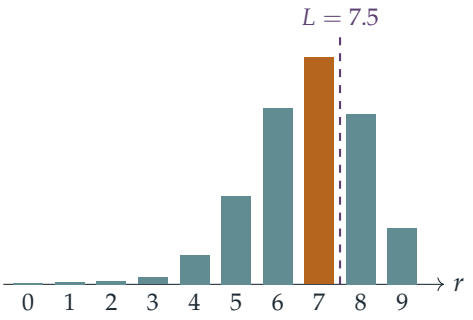
正是所求。

> **想一想** 為甚麼 m 不可能有三個值，或者有兩個不相鄰的值？

區間 $[L-1, L]$ 的長度是 1。若 L 不是整數，這個區間恰好包含一個整數 $\lfloor L \rfloor$，所以 m 是唯一的。若 L 是整數，區間恰好包含兩個相鄰整數 $L-1$ 和 L，所以 m 是其中之一。（事實上，由 $(*)$ 取 $r = L-1$ 可見 $c_{L-1} = c_L$，所以兩者確實都是最大的。）無論哪種情況，唯一的那個值，或兩個值中較大者，都是

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

從此以後，我們只需要這條公式。



按比例繪畫的 $(1+3x)^9$ 各項係數：當 $r < L-1 = 6.5$ 時係數上升，之後下降，在 $r = 7$ 處達到最大。

第 (i) 部分

對 $(n,a,b) = (9,1,3)$，$L = \frac{3\times 10}{4} = 7.5$，所以 $G(9,1,3) = 7$。

對 $(n,a,b)=(9,2,3)$，$L=\frac{3\times10}{5}=6$ 是整數，所以最大係數同時出現在 $r=5$ 和 $r=6$，而 $G(9,2,3)=6$。（驗證：$c_5=126\cdot2^4\cdot3^5=489\,888=84\cdot2^3\cdot3^6=c_6$。）

第 (ii) 部分

當 $a=b$ 時，$L=\frac{n+1}{2}$。

- $n=2k$：$L=k+\frac{1}{2}$，所以 $G(2k,a,a)=k$（即中間的係數，是唯一的）。
- $n=2k-1$：$L=k$ 是整數，所以中間兩個係數 $r=k-1$ 和 $r=k$ 相等，而 $G(2k-1,a,a)=k$。

這與帕斯卡三角形（Pascal's triangle）各行的對稱性（symmetry）吻合。

第 (iii) 部分

固定 n 和 b 時，$L=\frac{b(n+1)}{a+b}$ 是 a 的遞減函數（decreasing function），所以 $\lfloor L\rfloor$ 是 a 的非遞增函數（non-increasing function）。因此在正整數範圍內，它在 $a=1$ 時最大，此時 $G(n,1,b)=\left\lfloor\frac{b(n+1)}{b+1}\right\rfloor$。（其他 a 值可能與之相等，但沒有一個比它更大。）

第 (iv) 部分

現在

$$\frac{b(n+1)}{b+1}=(n+1)-\frac{n+1}{b+1}.$$

由於 $\frac{n+1}{b+1}>0$，此式小於 $n+1$，所以 $G(n,1,b)\le n$。（這亦可由 $m\le n$ 得出。）此外，

$$G(n,1,b)=n\iff(n+1)-\frac{n+1}{b+1}\ge n\iff\frac{n+1}{b+1}\le1\iff b\ge n.$$

所以 $G(n,1,b)$ 的最大可能值是 n，而且恰好在 $b\ge n$ 時達到。當 $b=n$ 時，最後兩個係數相等，因為 $c_{n-1}=n\cdot b^{n-1}=b^n=c_n$；當 $b>n$ 時，最後一個係數 b^n 是唯一的最大者。

驗算

- $(1+3x)^9$ 的係數是 $1,27,324,2268,10206,30618,61236,78732,59049,19683$：最大者在 $r=7$，與 (i) 的結果一致。
- 對 $(1+x)^4$（$n=2k$，$k=2$），係數 $1,4,6,4,1$ 在 $r=2=k$ 處最大；對 $(1+x)^3$（$k=2$），係數是 $1,3,3,1$，在 $r=1,2$ 處相等，較大的值是 $2=k$。
- 在 (iv) 中取 $n=3$：$(1+2x)^3$ 的係數是 $1,6,12,8$，在 $r=2$ 處最大；$(1+3x)^3$ 的係數是 $1,9,27,27$，所以當 $b=3$ 時便達到 $G=3$。

- 用電腦對所有 $n < 30$ 及 $a, b < 15$ 驗證 $G(n,a,b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$，每一種情況都吻合。

常見錯誤

- 證明上下界時忘記處理端點情況 $m = 0$ 和 $m = n$：此時並沒有 c_{-1} 或 c_{n+1} 可供比較。
- 當 L 是整數時，取了兩個相等值中較小的一個：G 定義為較大者，所以 $G(9,2,3) = 6$，而不是 5。
- 在 (iv) 中只答 $b = n$：其實每個 $b \geq n$ 都給出 $G = n$。

STEP 之外

這裏所用的比值檢驗，即比較相鄰兩項，與判斷級數（series）收斂（convergence）的比值檢驗法（ratio test）是同一個想法；它亦可找出二項分佈（binomial distribution）$\mathrm{B}(n,p)$（其中 $p = \frac{b}{a+b}$）的眾數（mode）：眾數是 $\lfloor (n+1)p \rfloor$。像二項式係數這樣先升後降的數列稱為單峯（unimodal）數列，而證明這一點的常用工具是對數凹性（log-concavity）（$c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1}$）。概率方面的內容，可參閱 Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。