詳細解答

STEP II 2014，第 7 題

純數學 • 絕對值函數的圖像

> **STEP II 2014，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q7

關鍵思路

若干絕對值函數（modulus function）之和是分段線性（piecewise linear）的：只有在其中某個絕對值內的式子等於零的點，斜率（gradient）才會改變。因此 $|x-a|+|x-b|$ 的圖像是一個「浴缸」：在 a 與 b 之間是平坦的底部，兩旁是斜率為 ± 2 的缸壁。之後各條方程的解的個數，就歸結為比較斜率：斜率為 2 的圖像必定會追上斜率為 1 的圖像，而兩個斜率相同的圖像要麼重合，要麼永不相交。

解答

全文設 $f(x)=|x-a|+|x-b|$，其中 $a<b$。

第 (i) 部分

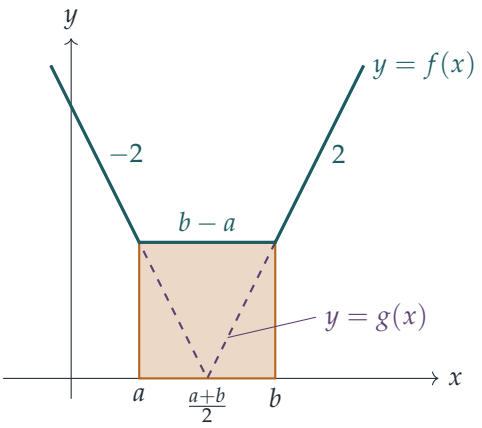
逐個區間去掉絕對值符號：

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

所以當 $x<a$ 時斜率為 -2，當 $a<x<b$ 時為 0，當 $x>b$ 時為 2。圖像是連續（continuous）的，在 $[a,b]$ 上方有一段高度為 $b-a$ 的平坦底部。

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$ 的圖像是一個 V 形，頂點在 $(\frac{a+b}{2},0)$，斜率為 ± 2。當 $x\ge b$ 時，$2x-a-b\ge b-a>0$，所以 $g(x)=2x-a-b=f(x)$；同理，當 $x\le a$ 時 $g(x)=a+b-2x=f(x)$。因此兩個圖像在 (a,b) 以外重合。在區間內，g 下降至 0，而

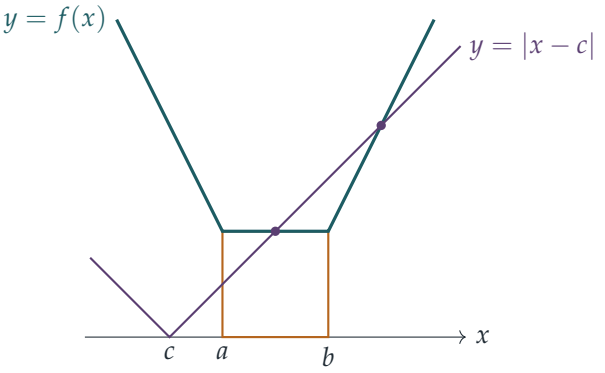
f 則保持在 $b-a$。（事實上 $f(x)=\max\{b-a,\, g(x)\}$。）



利用 $f(a)=f(b)=b-a$，可知該四邊形的頂點為 $(a,0)$、$(b,0)$、$(b,b-a)$ 和 $(a,b-a)$。它的底邊長 $b-a$，兩條鉛垂邊長 $b-a$，而且所有角都是直角。所以它是一個邊長為 $b-a$ 的**正方形**（square）。另外留意，由於 $g(a)=g(b)=b-a$，g 的 V 形從正方形底邊的中點出發，向上穿過它的兩個上方頂點。

第 (ii) 部分

現在比較 $y=f(x)$ 與 $y=|x-c|$；後者是一個頂點 $(c,0)$ 在 x 軸上、兩臂斜率為 ±1 的 V 形。關鍵事實是 f 恆不小於 $b-a>0$，而且它的缸壁（斜率 ±2）比 V 形的兩臂陡。草圖顯示 $c<a$ 的情況，此時 V 形與浴缸相交兩次。



情況 $a<c<b$：無解。在 $[a,b]$ 上，距離 $|x-c|$ 至多為 $\max\{c-a,\, b-c\}<b-a=f(x)$，所以 V 形嚴格位於浴缸底部之下。當 $x\geq b$ 時，

$$f(x)-|x-c|=(2x-a-b)-(x-c)=x-b+(c-a)\geq c-a>0,$$

而同樣的論證（或下文的對稱性（symmetry））可處理 $x \le a$ 的情況。所以 V 形完全處於浴缸之內，方程無解。

情況 $c = a$ 或 $c = b$：一個解。取 $c = a$。在 $[a, b]$ 上，$|x - a| = x - a \le b - a$，等號只在 $x = b$ 時成立。當 $x > b$ 時，$f(x) - (x - a) = x - b > 0$；當 $x < a$ 時，$f(x) - (a - x) = b - x > 0$。所以唯一的解是 $x = b$：V 形的右臂恰好穿過正方形的上方頂點 $(b, b - a)$。同理，當 $c = b$ 時唯一的解是 $x = a$。

情況 $c < a$：兩個解。左臂 $y = c - x$ 位於 $x \le c < a$ 的範圍，而 f 在該處的斜率為 -2。在 $x = c$ 處有 $f(c) > 0 = c - c$，而向左移動時 f 上升得比左臂快，所以對所有 $x \le c$ 都有 $f(x) > c - x$。左臂不給出任何解。

至於右臂 $y = x - c$（$x \ge c$），設 $k(x) = f(x) - (x - c)$。把 f 的各段斜率減去 1，可知 k 在 (c, a) 上斜率為 -3，在 (a, b) 上為 -1，當 $x > b$ 時為 $+1$。所以 k 在 $[c, b]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[b, \infty)$ 上嚴格遞增。此外

$$k(c) = f(c) > 0, \qquad k(b) = (b - a) - (b - c) = c - a < 0, \qquad k(x) \to \infty \text{ 當} x \to \infty.$$

因此 k 在 (c, b) 內恰有一個零點，在 (b, ∞) 內也恰有一個零點。具體而言，它們是

$$x = a + b - c \quad \text{及} \quad x = \begin{cases} b - a + c, & 2a - b \le c < a, \\ \frac{1}{3}(a + b + c), & c < 2a - b, \end{cases}$$

其中第二個解分別落在浴缸的底部或其左壁上。

情況 $c > b$：兩個解。關於直線 $x = \frac{a+b}{2}$ 的反射（reflection）$x \mapsto a + b - x$ 使 f 保持不變（它把 $|x - a|$ 與 $|x - b|$ 互換），並把 $|x - c|$ 變為 $|x - c'|$，其中 $c' = a + b - c < a$。所以這個情況是上一個情況的鏡像。

總結：若 $a < c < b$，則有 0 個解；若 $c = a$ 或 $c = b$，則有 1 個解；若 $c < a$ 或 $c > b$，則有 2 個解。

第 (iii) 部分

設 $F(x) = |x - c| + |x - d|$。由第 (i) 部分，F 是第二個浴缸，在 $[c, d]$ 上方的底部高度為 $d - c$，缸壁斜率為 ± 2。由於 $d - c < b - a$，它的底部比 f 的更低也更窄。記

$$m = \tfrac{1}{2}(a + b), \qquad n = \tfrac{1}{2}(c + d)$$

為兩個底部的中點，並設 $h(x) = f(x) - F(x)$。

在最左方（當 $x \le \min\{a, c\}$ 時），兩個圖像都在各自的左壁上，所以 $h(x) = (a + b - 2x) - (c + d - 2x) = 2(m - n)$。在最右方（當 $x \ge \max\{b, d\}$ 時），$h(x) = 2(n - m)$。在兩者之間，h 是連續且分段線性的。

想一想 兩個圖像能否共有一整段線段，從而給出無限多個解？

只有在兩者斜率相同的地方才有可能。兩個底部都是平的，但它們處於不同高度 $b-a \neq d-c$，所以不會重疊。除此之外，斜率只在兩個圖像都位於左壁（$x < \min\{a,c\}$）或都位於右壁（$x > \max\{b,d\}$）時才相同，而在這些地方 $h = \pm 2(m-n)$。所以兩個圖像共有一段線段，當且僅當 $m = n$。

情況 $a+b=c+d$：無限多個解。此時當 $x \leq \min\{a,c\}$ 及 $x \geq \max\{b,d\}$ 時 $h = 0$。由於 $d-c < b-a$ 而兩個中點相同，有 $a < c < d < b$：小浴缸正好位於大浴缸的中央。當 $c \leq x \leq b$ 時，F 的圖像在其底部或右壁上，所以 $F(x) \leq 2b-c-d = b-a = f(x)$，等號只在 $x = b$ 時成立。由對稱性，在 $[a,d]$ 上亦然。所以解集恰好是 $x \leq a$ 連同 $x \geq b$。

情況 $a+b < c+d$：恰有一個解。此時在最左方 $h = 2(m-n) < 0$，在最右方 $h = 2(n-m) > 0$。h 在哪裏會遞減？這需要 f 的斜率小於 F 的斜率，有兩種可能。

- f 在其左壁上而 F 不在，這需要 $c < x < a$。於是 $c < a$，又由於 $d-c < b-a$，亦有 $d < b$，從而 $c+d < a+b$，但這在此情況下不成立。
- f 在其底部而 F 在其右壁上，這需要 $d < x < b$。

所以 h 在 $(-\infty, d]$ 上是非遞減的。在 $[d,\infty)$ 上，h 在 $[d,b]$ 上非遞增（若 $d < b$），然後當 $x \geq \max\{b,d\}$ 時恆等於 $2(n-m)$。所以對所有 $x \geq d$ 都有 $h(x) \geq 2(n-m) > 0$。在 $(-\infty, d]$ 上，h 從值 $2(m-n) < 0$ 不遞減地上升至 $h(d) > 0$，而且（由上面方框的討論）它不會在任何區間上恆等於零。所以 h 在該處恰有一個零點。總共恰有一個解。

情況 $a+b > c+d$：恰有一個解，可由反射 $x \mapsto -x$ 得出；這個反射把 a,b,c,d 換成 $-b,-a,-d,-c$，並使兩個和之間的不等式反向。

總結：在 $a < b$、$c < d$ 及 $d-c < b-a$ 的條件下，若 $a+b = c+d$（兩個區間的中點相同），則有無限多個解，即所有 $x \leq a$ 及所有 $x \geq b$。否則恰有一個解。

驗算

- 第 (ii) 部分取 $a=1$、$b=3$、$c=0$：解 $x = a+b-c = 4$ 及 $x = b-a+c = 2$ 分別給出 $|3|+|1| = 4$ 及 $1+1 = 2$，符合要求。取 $c=-5$ 時，第二個解是 $\frac{1}{3}(1+3-5) = -\frac{1}{3}$，而確實 $\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3}+5|$。
- 第 (iii) 部分取 $a=0$、$b=10$、$c=6$、$d=7$：h 在最左方為 -3，在 $[6,7]$ 上升至 9，然後回落至 3 並保持不變。它唯一的零點是 $x = \frac{3}{2}$，此時兩邊都等於 10。
- 以電腦對數以萬計隨機選取的整數 a,b,c,d 作檢驗，每種情況下得到的解的個數都與上述完全一致。

常見錯誤

- 在 (ii) 中遺漏邊界情況 $c = a$ 及 $c = b$；此時 V 形剛好碰到正方形的一個頂點。
- 在 (iii) 中假設 h 是單調（monotonic）的。其實不然：當小浴缸偏離中央地位於大浴缸內時，h 在 (d, b) 上遞減。令解的個數不受影響的是，h 在該處已經是正數。
- 在 (iii) 中遺漏中點重合時的無限多解情況。

STEP 之外

函數 $|x - a| + |x - b|$ 是 x 到兩個點的距離總和。把這類距離之和最小化，正是統計學中中位數（median）以及 ℓ^1（「計程車」）範數（norm）背後的概念。像 f 這樣的函數是凸（convex）的，而這裏關於斜率逐段遞增的論證，正是凸分析（convex analysis）的起點；凸分析是線性規劃（linear programming）和最優化（optimisation）的基礎。Bartle 與 Sherbert 所著的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）把這裏用到的連續性和單調性論證嚴格化。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。