詳細解答

STEP II 2014，第 6 題

純數學 • 三角級數

> **STEP II 2014，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q6

關鍵思路

把每個 $\cos rx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，就會變成兩個正弦之差，於是整個和式可以伸縮相消（telescopes）。這個和式正正就是 $S_n'(x)$，這也是題目給出這個恆等式的原因：它告訴我們 S_n 在哪裏有駐點（stationary point）。在這樣的點上，新加的項 $\frac{1}{n}\sin nx$ 原來是非負的，所以加上它不會製造出負的極小值；再從 $S_1 = \sin x$ 開始用歸納法（induction），就可以完成證明。

解答

餘弦之和

利用和差化積公式(factor formula)$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，取 $A = (r+\frac{1}{2})x$、$B = (r-\frac{1}{2})x$，得

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

由 $r = 1$ 加到 n，右邊加起來是 $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$，而左邊除了首項和末項之外全部互相抵消：

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

兩邊除以 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$，即得所求結果。留意逐項微分（differentiating term by term）可得

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

所以這個恆等式就是 S_n' 的閉形式（closed form）。

第 (i) 部分

這裏 $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$，所以

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

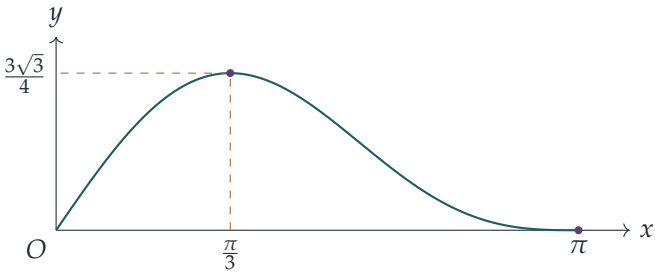
在 $[0, \pi]$ 上，當 $\cos x = \frac{1}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{3}$，以及當 $\cos x = -1$，即 $x = \pi$ 時，它等於零。對應的值為

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

由於 $\cos x + 1 \geq 0$，S_2' 的正負號與 $2\cos x - 1$ 相同：在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 上為正，在 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ 上為負。所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 是極大值（maximum），而 S_2 由此遞減至 $x = \pi$ 時的 0，到達時斜率為零。在 π 附近，設 $x = \pi - t$，

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

所以曲線到達橫軸時會像三次曲線般變得平坦。此外 $S_2(0) = 0$，且 $S_2'(0) = 2$。



第 (ii) 部分

假設 $S_n'(x_0) = 0$，其中 $0 < x_0 < \pi$。那麼 $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$，所以恆等式適用，得 $\sin(n + \frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$。展開左邊，

$$\sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0\sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1 - \cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

由於 $0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$，兩邊除以它得

$$\sin nx_0 = (1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

此即所求。因此，對於 $n \geq 2$，

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

因為 $1 - \cos nx_0 \geq 0$ 且 $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$。所以 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$。

現在假設對所有 $x \in (0, \pi)$ 都有 $S_{n-1}(x) > 0$，並用反證法（proof by contradiction），假設存在某個 $c \in (0, \pi)$ 使得 $S_n(c) \leq 0$。

想一想 我們怎樣知道有駐點可用？

S_n 在閉區間（closed interval）$[0,\pi]$ 上連續（continuous），所以它在那裏取得最小值 m，而且 $m \le S_n(c) \le 0$。若 $m < 0$，由於 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$，最小值不在端點；若 $m = 0$，則 c 本身就是取得最小值的內點。無論哪種情況，都存在 $x_0 \in (0,\pi)$ 使得 $S_n(x_0) = m \le 0$；又由於 S_n 可微（differentiable），內部的最小值必定是駐點：$S_n'(x_0) = 0$。於是前面的結果給出

$$0 \ge S_n(x_0) \ge S_{n-1}(x_0) > 0,$$

矛盾。所以對所有 $x \in (0,\pi)$ 都有 $S_n(x) > 0$。

第 (iii) 部分

我們用歸納法證明當 $0 < x < \pi$ 時 $S_n(x) > 0$。當 $n = 1$ 時，在 $(0,\pi)$ 上 $S_1(x) = \sin x > 0$。若結論對 S_{n-1} 成立，則第 (ii) 部分說明它對 S_n 亦成立。所以結論對每個 $n \ge 1$ 都成立。在端點處，每一項 $\frac{1}{r}\sin rx$ 都是零，所以 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$。因此對所有 $n \ge 1$ 及 $0 \le x \le \pi$，都有 $S_n(x) \ge 0$。

驗算

- 在餘弦之和中代入 $n = 1$：$\dfrac{\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ 應該等於 $\cos x$，而由和差化積公式，它確實如此。
- 第 (i) 部分與恆等式吻合：$S_2' = 0$ 即 $\sin\frac{5}{2}x = \sin\frac{1}{2}x$，它在 $(0,\pi]$ 內的解是 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $x = \pi$。
- 極大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ 與在細密網格上直接計算 S_2 的結果相符。電腦驗算找出了 $2 \le n \le 40$ 時 S_n 在 $(0,\pi)$ 內的每一個駐點，並在每一點確認了第 (ii) 部分的恆等式及 $S_n(x_0) \ge S_{n-1}(x_0)$；亦確認了對於 $n \le 60$，在區間內部 $S_n > 0$。

常見錯誤

- 論證「處處 $S_n \ge S_{n-1}$」。這是錯的（例如在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上 $\sin 2x < 0$）；這個不等式只在 S_n 的駐點成立，所以才需要用最小值的論證。
- 找最小值時忘記端點：必須利用 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$，才能把非正的最小值定位在區間內部。
- 除以 $\cos\frac{1}{2}x_0$ 時沒有說明它為何是正數。

STEP 之外

第 (iii) 部分的結果就是 Fejér–Jackson–Gronwall 不等式。當 $n \to \infty$ 時，$S_n(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上收斂（converges）至 $\frac{1}{2}(\pi - x)$：$\sum \frac{1}{r} \sin rx$ 是鋸齒波（sawtooth wave）的傅里葉級數（Fourier series），而在 $x = 0$ 附近，部分和會出現過衝（吉布斯現象，Gibbs phenomenon）。傅里葉級數，以及它們何時收斂這個微妙的問題，是大學第一門分析或數學方法課程的核心課題。T. W. Körner 的 *Fourier Analysis*（《傅里葉分析》）是一部精彩而涵蓋廣泛的著作。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。