詳細解答

STEP II 2014，第 5 題

純數學 • 齊次微分方程

STEP II 2014，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q5

關鍵思路

兩條方程的右方都是兩個線性式之比。在 (i) 中，每一項都是一次項，因此斜率（gradient）只取決於 y/x，代入 $y = xu$ 便可把方程化為可分離變數（separable）的方程。在 (ii) 中，常數項破壞了這個性質，但只要把原點移到分子和分母所代表的兩條直線的交點，便可消去常數項；之後就跟 (i) 完全一樣。

解答

若 $y = xu$，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

第 (i) 部分

把右方的分子和分母同除以 x，方程變為

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{所以} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

分離變數，得

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 不用部分分式（partial fractions），怎樣積分左方？

把分母求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$。因此分子是分母導數的 $-\frac{1}{2}$ 倍，

於是

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

兩邊乘以 -2 再取指數，得 $x^2\,|1+4u-u^2| = A$，其中 A 為正常數；即對某常數 K 有 $x^2(1+4u-u^2) = K$（沿着曲線，符號保持不變）。現代入 $u = y/x$，使得 $x^2(1+4y/x - y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$：

$$x^2+4xy-y^2 = K.$$

在 $(1,1)$ 處得 $K = 1+4-1 = 4$，所以解曲線為

$$\boxed{x^2+4xy-y^2 = 4}$$

（在 $(1,1)$ 處 $u=1$，此時 $1+4u-u^2 = 4 \neq 0$ 且 $u \neq 2$，所以我們除過的式子在起點處都不為零。）

第 (ii) 部分

直線 $x-2y-4=0$ 與 $2x+y-3=0$ 相交於 $y = 3-2x$ 且 $x-2(3-2x)-4=0$ 之處，即 $(2,-1)$。因此取 $a=2$、$b=-1$：$x = X+2$，$y = Y-1$。於是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$，而且

$$x-2y-4 = (X+2)-2(Y-1)-4 = X-2Y,$$
$$2x+y-3 = 2(X+2)+(Y-1)-3 = 2X+Y,$$

所以常數項消失了：

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

這與 (i) 的形式相同，所以代入 $Y = XV$：

$$V + X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$，分子同樣是分母導數的倍數。因此

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

與之前一樣得 $X^2(1-4V-V^2) = K$，即

$$X^2-4XY-Y^2 = K.$$

點 $(1,1)$ 對應 $X=-1$、$Y=2$，得 $K = 1-4(-1)(2)-4 = 5$。換回 x 和 y，

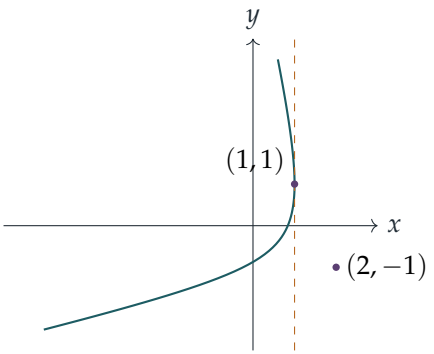
$$(x-2)^2-4(x-2)(y+1)-(y+1)^2 = 5,$$

展開得

$$(x^2-4x+4)-4(xy+x-2y-2)-(y^2+2y+1) = 5$$
$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{x^2-4xy-y^2-8x+6y+6=0}$$

想一想 在 $(1,1)$ 處，分母 $2x+y-3$ 等於零。這個解還有意義嗎？

有：該處的斜率為無窮大，所以曲線在 $(1,1)$ 處有一條鉛垂切線（vertical tangent）。隱方程（implicit equation）完全可以描述這條曲線，只是它在該點附近並非某個函數 $y(x)$ 的圖像而已。換句話說，x 是 y 的光滑函數。把二次方程對 x 求解，在經過 $(1,1)$ 的分支上得 $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$；由於 $5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$，它對所有 y 都有定義，並在 $y=1$ 時取得最大值 $x=1$。



圖中顯示經過 $(1,1)$ 的分支（藍綠色），它在該點與鉛垂線 $x=1$（虛線）相切；$(2,-1)$ 是雙曲線（hyperbola）的中心。

驗算

- 對答案進行隱函數求導（implicit differentiation）。在 (i) 中，由 $2x+4y+(4x-2y)y'=0$ 得 $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$，符合要求。在 (ii) 中，由 $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=0$ 得 $y'=\dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$。
- 兩條曲線都經過 $(1,1)$：$1+4-1=4$ 及 $1-4-1-8+6+6=0$。
- 用電腦從 $(1,1)$ 出發，以數值方法逐步求解每條微分方程（differential equation），方框內方程的左方一直保持等於 4 和 0，誤差約為 10^{-13}。在 (i) 中，$(1,1)$ 處的斜率為 -3。

常見錯誤

- 在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=u+x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 中漏掉 u，結果得到錯誤的可分離方程。
- 在 (ii) 中用錯坐標代入條件：點 $(1,1)$ 會變成 $(X,Y)=(-1,2)$，而不是 $(1,1)$。

► 對 u 貿然使用部分分式：$1 + 4u - u^2$ 的根是 $2 \pm \sqrt{5}$，計算繁複，而被積函數其實已經是 f'/f 的形式。

STEP 之外

右方只取決於 y/x 的方程稱為齊次方程（homogeneous equation），而 (ii) 中平移原點的做法，是處理線性函數之比的標準技巧。這裏的兩條方程同時也是恰當方程（exact equation）：把 (i) 寫成 $(2y + x)\,\mathrm{d}x - (y - 2x)\,\mathrm{d}y = 0$，兩個係數滿足交叉偏導數檢驗，守恆量 $x^2 + 4xy - y^2$ 可以直接讀出。恰當方程、積分因子（integrating factor）以及線性系統的相圖（phase portrait）（這些雙曲線的真正身份正是如此），可參閱 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。