詳細解答

STEP II 2014，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2014，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q4

關鍵思路

代換（substitution）$u = 1/x$ 會把區間 $[1/b, b]$ 的兩個端點互換，因此它把積分 I 變回同一範圍上的積分。若新的被積函數（integrand）只是原來的被積函數變了號，便得到 $I = -I$。若新的被積函數與原來的密切相關，把 I 的兩種形式相加，可能得到一個容易積分得多的被積函數。在最後一部分，同樣的技巧（取 $u = a^2/x$，使 $[0, \infty)$ 映射到自身）會給出一條方程，從中可解出所求的積分。

解答

第 (i) 部分

記該積分為 I。令 $x = 1/u$，則 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ 及 $\ln x = -\ln u$。當 $x = 1/b$ 時 $u = b$；當 $x = b$ 時 $u = 1/b$。此外

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

最後這個積分其實就是 I，只是把啞變數（dummy variable）改了名。因此 $I = -I$，得 $I = 0$，即所求。（由於 $b > 0$，被積函數在 $[1/b, b]$ 上連續，所以 I 是一個有限的數，這一步是成立的。）

第 (ii) 部分

記這個積分為 I。同樣的代換給出 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u \cdot (-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$，而積分上下限也像之前一樣互換：

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big(-\frac{1}{u}\Big)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

這一次並非單純變號，所以我們把這個形式與原來的形式相加：

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

想一想 當 $u > 0$ 時，$\arctan u + \arctan(1/u)$ 等於多少？

設 $\theta = \arctan u$，其中 $u > 0$，則 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，且 $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta = 1/u$。由於 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 亦位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，它就是 $\arctan(1/u)$。所以對所有 $u > 0$，$\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$。（當 $u < 0$ 時，兩者之和為 $-\frac{\pi}{2}$，但 $[1/b, b]$ 內每個 u 都是正數。）因此

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}(\ln b - \ln(1/b)) = \pi \ln b,$$

所以 $I = \dfrac{\pi \ln b}{2}$，即所求。無論 $b > 1$ 還是 $0 < b < 1$，此結果均成立。

第 (iii) 部分

設 $J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2}$。這個積分收斂（converge），因為被積函數連續，而且當 x 很大時不超過 $1/x^4$。我們想要一個代換，把 $(0, \infty)$ 映射到自身，並把 $a^2 + x^2$ 變成 $a^2 + u^2$ 的某個倍數，所以取 $u = a^2/x$，即 $k = a^2$。於是 $x = a^2/u$，$\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$，$x \to 0^+$ 對應 $u \to \infty$，而且

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2 + a^2)}{u^2}.$$

因此

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{u^4}{a^4(a^2 + u^2)^2}\Big(-\frac{a^2}{u^2}\Big)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

現在把分子寫成 $u^2 = (a^2 + u^2) - a^2$：

$$\frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2} = \frac{1}{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}.$$

兩部分在 $(0, \infty)$ 上的積分都收斂，所以可以把積分拆開。利用題目給出的結果，

$$J = \frac{1}{a^2}\Big(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\Big) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

因此 $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$，所以

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

即所求。

驗算

- 在 (ii) 中，$b = 1$ 給出長度為零的區間，而 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$ 確實成立。把 b 換成 $1/b$ 會使上下限互換，所以積分應該變號，而 $\ln(1/b) = -\ln b$ 與此吻合。
- 在 (iii) 中，答案應有正確的標度關係：令 $x = at$ 得 $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$，所以 J 必定是某常數乘以 a^{-3}。取 $a = 1$，代換 $x = \tan\theta$ 給出 $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$，與結果相符。
- 以數值計算，(ii) 中的積分在 $b = 2$ 時為 $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$。對於若干隨機選取的 a 和 b，(i) 中的積分計算結果都是 0（準確至多個小數位）。

常見錯誤

- 忘記 $u = 1/x$ 同時會使上下限倒轉。$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ 帶來的負號和上下限的互換，兩者都必須留意。
- 使用 $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ 時沒有說明它需要 $u > 0$。
- 在 (iii) 中，得到 $\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ 後就停下來，沒有發現它可以改寫成以 J 和題目給出的積分表示。

STEP 之外

利用定義域的對稱性把一個積分與其自身聯繫起來，是一個常見技巧。它會在圍道積分（contour integration）以及諸如 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 的積分中再次出現。(iii) 中的積分亦來自一個一般的積分族：把 $\int_0^\infty (\lambda+x^2)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lambda^{-1/2}$ 對 λ 求導，即可立刻得到同樣的答案（「積分號下求導」（differentiation under the integral sign））。實分析（real analysis）課程會解釋這類步驟，以及反常積分（improper integral）的處理，在甚麼情況下是容許的。參見 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。