詳細解答

STEP II 2014，第 3 題

純數學 • 切線與包絡線

STEP II 2014，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q3

關鍵思路

在 P 點的切線（tangent）其實只是一條直線，斜率（gradient）為 y'，y 截距（y-intercept）為 $y - xy'$，因此第 (i) 部分把「距離恆定」這個性質化為一條微分方程（differential equation）。把這條方程微分後會出現因子 y''，而令乘積為零的兩種方式，正好給出兩族曲線：直線（$y'' = 0$）和一個圓。第 (iii) 部分則要求我們把這些曲線的片段平滑地拼接起來。

解答

第 (i) 部分

若 $m = 0$，直線為 $y = c$，距離顯然是 c，所以設 $m \neq 0$。直線與 y 軸交於 $A = (0, c)$，並與 x 軸成銳角（acute angle）θ，其中 $\tan\theta = |m|$。設 N 為由 O 到該直線的垂足（foot of the perpendicular）。在直角三角形 ONA 中，直線與 y 軸在 A 點所成的角為 $\frac{\pi}{2} - \theta$，所以角 AON 為 θ，於是

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

（求 $x^2 + (mx + c)^2$ 的最小值也會得到同一結果：這是 x 的二次式（quadratic），在 $x = -\frac{mc}{1+m^2}$ 時取最小值 $\frac{c^2}{1+m^2}$。）

若 $c < 0$，以原點作反射（reflection），直線會變成 $y = mx + |c|$，而與 O 的距離不變，所以一般而言距離為 $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$。

第 (ii) 部分

在 $P=(x,y)$ 點，切線的斜率為 y' 並經過 P，所以以坐標 (X,Y) 表示，其方程為

$$Y = y'X + (y - xy').$$

這是第 (i) 部分那種形式的直線，其中 $m = y'$、$c = y - xy'$（按假設它不是鉛垂線）。因此它與 O 的距離為

$$a = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

兩邊平方得

$$(y - xy')^2 = a^2(1+(y')^2). \qquad (*)$$

微分。這裏 a 是常數，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y-xy') = y' - y' - xy'' = -xy''$。所以把 $(*)$ 微分得

$$2(y-xy')(-xy'') = 2a^2y'y'', \qquad \text{即} \qquad y''[\,x(y-xy') + a^2y'\,] = 0.$$

想一想 乘積為零，怎樣變成曲線的兩種不同情況？

在每一點，要麼 $y''=0$，要麼方括號內的式子為零。在曲線上 $y''=0$ 的一段，曲線是直的；在 $y''\neq 0$ 的一段，方括號必須為零。我們逐一處理這兩種情況。（我們假設 $a>0$；若 $a=0$，每條切線都經過 O，C 就只是一條經過原點的直線。）

情況一：$y''=0$。此時 $y'=m$ 為常數，而 $y=mx+k$，其中 m、k 為常數。代入 $(*)$（此時 $y-xy'=k$），得 $k^2 = a^2(1+m^2)$，所以

$$y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

情況二：方括號爲零。此時 $xy - x^2y' + a^2y' = 0$，所以

$$(x^2-a^2)\,y' = xy.$$

首先，$x^2\neq a^2$：若 $x=\pm a$，則 $xy=0$ 迫使 $y=0$，而 $(*)$ 變成 $a^2(y')^2 = a^2(1+(y')^2)$，這是不可能的。所以我們可以相除：

$$y' = \frac{xy}{x^2-a^2}, \qquad y - xy' = \frac{y(x^2-a^2) - x^2y}{x^2-a^2} = \frac{-a^2y}{x^2-a^2}.$$

把兩者代入 $(*)$，再全式乘以 $(x^2-a^2)^2/a^2$：

$$\begin{aligned} & a^2y^2 = (x^2-a^2)^2 + x^2y^2 \\ \iff \quad & y^2(a^2-x^2) = (a^2-x^2)^2 \\ \iff \quad & (a^2-x^2)\,(x^2+y^2-a^2) = 0. \end{aligned}$$

由於 $a^2 - x^2 \neq 0$，我們得出 $x^2 + y^2 = a^2$。

所以，要麼對某個 m 有 $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，要麼 $x^2 + y^2 = a^2$，正如所求。兩者確實都具有該性質：由第 (i) 部分，這些直線與 O 的距離為 a；而以 O 為圓心、半徑為 a 的圓，其每條切線與 O 的距離都是 a。

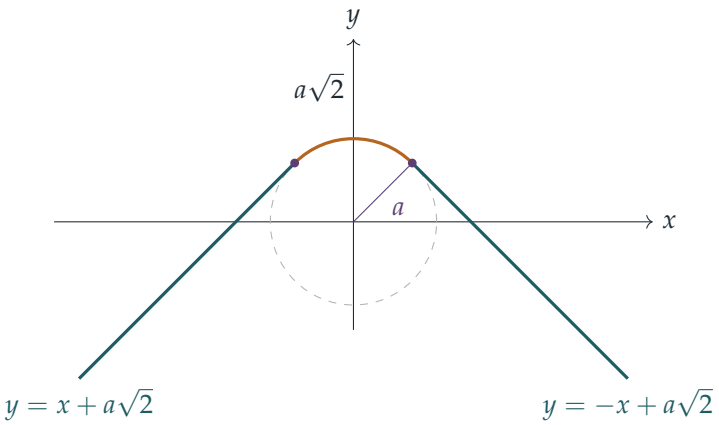
第 (iii) 部分

在直線段與圓弧相接之處，C 必須有切線，所以直線在該點的斜率必須與圓弧相同：每條直線都是圓在圓弧端點處的切線。此外，每條切線都必須不是鉛垂線，所以圓弧不能到達 $(\pm a, 0)$ 兩點；又因為 C 是 x 的函數（function）的圖像，它只能用圓的上半部或只用下半部。

一個例子：取 $x^2 + y^2 = a^2$ 上由 $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 經頂部到 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 的圓弧，兩端再以該處的切線延伸：

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

這兩條直線的 $m = \pm 1$，截距為 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，符合情況一的要求。在 $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ 處，圓弧的斜率為 $-\frac{x}{y} = \mp 1$，與直線吻合，所以斜率處處連續（continuous）且有限。



上半圓（或下半圓）上任何不包含 $(\pm a, 0)$ 的圓弧，兩端以其切線延伸，都同樣可行。

驗算

- 在第 (i) 部分，$m = 0$ 給出距離 c；當 $|m| \to \infty$，直線變得陡峭，距離趨於 0，這對經過 $(0, c)$ 的直線來說理應如此。

- 在圓上，$y' = -x/y$ 給出 $y - xy' = a^2/y$，而 $(*)$ 兩邊都等於 a^4/y^2。
- 對於 $a = 1$ 的例子，我們用電腦在 $x = -5$ 至 $x = 5$ 之間的 1001 個點檢查了 O 到切線的距離，每次都是 1；例如在 $x = 2$，切線為 $y = -x + \sqrt{2}$，距離為 $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$。

常見錯誤

- 把微分後的方程除以 y''，因而遺漏了直線解。
- 忘記 a 是常數，或把 xy' 微分成 y'，而不是 $y' + xy''$。
- 在第 (iii) 部分，直線與圓弧在接駁處形成尖角，或用了整個半圓，而半圓兩端的切線是鉛垂的。

STEP 之外

這裏的圓是直線族 $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ 的包絡線（envelope），而 $(*)$ 是一條克萊羅方程（Clairaut equation）$y = xy' + f(y')$：它的通解（general solution）是一族直線，而它的奇解（singular solution）就是這族直線的包絡線。把 $(*)$ 視為 y' 的二次方程，其判別式（discriminant）為 $4a^2(x^2 + y^2 - a^2)$，所以兩個斜率選擇恰好在圓上重合；這就是為甚麼解可以像第 (iii) 部分那樣在圓上拼接，也是為甚麼解的唯一性（uniqueness）不成立。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了一階方程解的存在性（existence）與唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。