詳細解答

STEP II 2014，第 2 題

純數學 • 積分不等式

> **STEP II 2014，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 3.7 節 $\pi^2 \leq 10$ 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/wirtinger.html

關鍵思路

$(*)$ 兩邊都是積分，對任何明確給出的 f 都可以精確計算，所以每一個在兩端都等於零的函數，都會把 $(*)$ 變成一條涉及 π 的數值不等式。真正需要選擇的，只是怎樣取自由常數，使 $f(0) = f(\pi) = 0$。若函數在某一端不等於零，它可以數值很大而變化很慢，這正是端點條件（end conditions）重要的原因。

解答

第 (i) 部分

取 $f(x) = \sin nx$，則 $f'(x) = n\cos nx$。利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 及 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$，

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\left[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

這是因為對整數 n 有 $\sin 2n\pi = 0$。由於 $n \geq 1$，故 $n^2 \geq 1$，於是 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2}$，$(*)$ 成立（當且僅當 $n = 1$ 時取等號）。

反例（counterexamples）。取 $f(x) = \pi - x$，它滿足 $f(\pi) = 0$，但 $f(0) = \pi \neq 0$。於

是 $f'(x) = -1$，而

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

由於 $\pi^2 > 3$，得 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$，所以 $(*)$ 不成立。同理，$f(x) = x$ 滿足 $f(0) = 0$，但 $f(\pi) = \pi \neq 0$，它給出相同的兩個積分，$\frac{\pi^3}{3} > \pi$，所以 $(*)$ 再次不成立。因此，即使另一個端點條件成立，兩個端點條件都不能省去。

第 (ii) 部分

二次函數（quadratic）。我們需要 $f(0) = c = 0$ 及 $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$，所以 $b = -a\pi$，且 $f(x) = ax(x - \pi)$。若取 $a = 0$，則 $f \equiv 0$，只得到毫無用處的不等式 $0 \leq 0$，所以取 $a \neq 0$。當 f 乘以 a 時，$(*)$ 兩邊都乘以 a^2，所以不妨取 $a = -1$：

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

代入 $x = \frac{\pi}{2} + u$，可使兩個積分都變得對稱：$f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$，$f' = -2u$，而 u 的範圍是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。記 $h = \frac{\pi}{2}$，

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

所以 $(*)$ 給出 $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$，兩邊除以正數 $\frac{\pi^3}{30}$，得

$$\pi^2 \leq 10,$$

即為所求。

三角函數（trigonometric function）。現在 $f(0) = q + r$，而 $f(\pi) = p \sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$。兩者同時為零，當且僅當 $p = q = -r$。同樣地，$r = 0$ 會給出 $f \equiv 0$，而縮放並無影響，所以取 $r = -1$：

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

? **想一想** 怎樣把 f 平方，而不弄出一大堆交叉項（cross terms）？

把它組合成 $(s + c) - 1$，其中 $s = \sin\frac{1}{2}x$，$c = \cos\frac{1}{2}x$。於是 $(s + c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$，所以

$$f^2 = (s + c)^2 - 2(s + c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{1}{2}x - 2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

利用 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$、$\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$ 及 $\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$，

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

同樣地，$(c-s)^2 = 1 - \sin x$，所以

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi - 2}{4}.$$

於是 $(*)$ 表示 $2\pi - 6 \le \frac{1}{4}(\pi - 2)$，即 $8\pi - 24 \le \pi - 2$，所以

$$7\pi \le 22, \qquad \text{即} \qquad \pi \le \frac{22}{7}.$$

比較。把第二條不等式平方（兩邊皆為正數），得

$$\pi^2 \le \frac{484}{49} < \frac{490}{49} = 10.$$

所以三角函數的選擇給出較小的上界（upper bound）$\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$，因此是較好的估計。兩者都是上界，所以較小的一個更接近真實值。

驗算

- 真實值為 $\pi^2 \approx 9.8696$，低於 10 及 $\frac{484}{49} \approx 9.8776$，這是必然的。
- 以數值計算，對於三角函數 f，$(*)$ 兩邊分別為 $2\pi - 6 \approx 0.2832$ 及 $\frac{1}{4}(\pi - 2) \approx 0.2854$：兩者非常接近，所以界 $\pi \le \frac{22}{7}$ 才會如此精確。對於二次函數，兩邊分別為 $\frac{\pi^5}{30} \approx 10.20$ 及 $\frac{\pi^3}{3} \approx 10.34$。
- 在第 (i) 部分中，$n = 1$ 時取等號，所以 $\sin x$ 是 $(*)$ 的極端情況。三角函數 f 的形狀與 $\sin x$ 很接近，而 $x(\pi - x)$ 則稍遜一點，這解釋了為何某個界較好。

常見錯誤

- 選取像 $f = 1$ 這樣同時破壞兩個端點條件的反例。這樣做是正確的，但 $\pi - x$ 和 x 說明得更多：每個條件本身都是必需的。
- 在三角函數的情況下計算 f^2 的積分時，忘記 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$（而不是 0）。
- 因為 10 是個「較整齊」的數，便說它是較好的估計。兩者都是上界，所以較小的一個才較好。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 就是 Wirtinger 不等式（Wirtinger's inequality），而最佳常數 1 來自 $\sin x$：它是在 $f(0) = f(\pi) = 0$ 條件下 $-f'' = \lambda f$ 的最小特徵值（eigenvalue）。以選定的函數代入 $(*)$ 來測試，就是瑞利–里茲方法（Rayleigh–Ritz method），它總是給出該特徵值的上界，也是工程師估算振動頻率的基礎。傅里葉級數（Fourier series）則能給出 $(*)$ 本身的一個簡潔證明。有關背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；有關特徵值方面，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。